Bir mühendislik yapısını boyutlandırırken her zaman şu iki ~~iki~~ şartı sağlanmasını isteriz.

1) Emniyet şartı
2) Ekonomik
3) Estetik

Moment



$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$

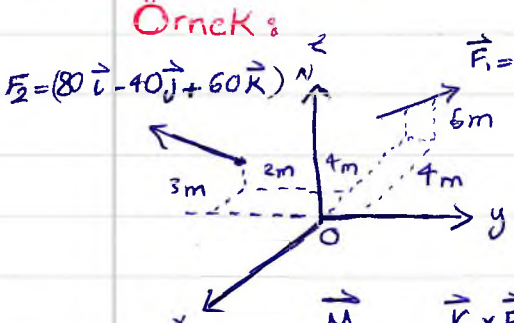
$M_o \perp (\vec{r} \text{ ile } \vec{F})$

$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

$\Sigma M = \Sigma \vec{r} \times \vec{F}$

Örnek:



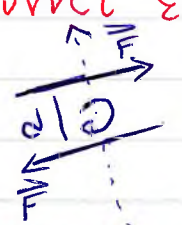
$\vec{r}_1 = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$

$\vec{r}_2 = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\vec{M}_{R_o} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 6 \\ -50 & 20 & 40 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -4 & 2 \\ 80 & -40 & 60 \end{vmatrix}$$

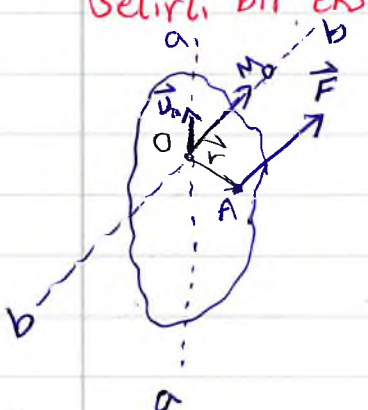
$= (-160\vec{i} + 200\vec{j} + 510\vec{k})$ N.m

Kuvvet Çifti:



$M_o = dF$

Belirli bir eksen etrafında bir kuvvetin momenti:



$\vec{M}_{aa} = ?$ Önce aa ekseninde bir o noktası seçiyoruz.

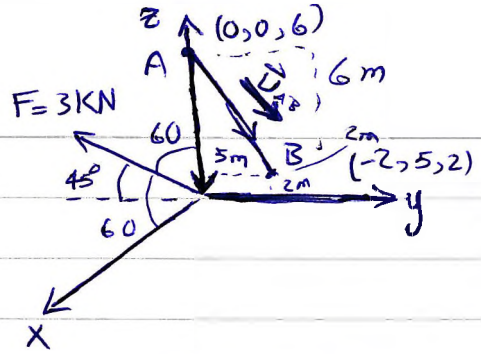
$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{M}_o \perp (\vec{r} \text{ ve } \vec{F})$

$M_{aa} = \vec{u}_a \cdot \vec{M}_o$

$\vec{M}_{aa} = \vec{u}_a M_{aa} = \vec{u}_a (\vec{u}_a \cdot \vec{M}_o)$

Örnek: F kuvvetin AB ekseni etrafındaki momentini bulunuz.



$F_x = F\cos 60 = 1.5$

$F_y = F\cos 45 = -2.12$

$F_z = F\cos 60 = 1.5$

$\vec{F} = 1.5\vec{i} - 2.12\vec{j} + 1.5\vec{k}$

$\vec{r}_{AB} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$

$\vec{U}_{AB} = \dfrac{\vec{r}_{AB}}{|\vec{r}_{AB}|}$

$\vec{U}_{AB} = \dfrac{-2\vec{i}+5\vec{j}-4\vec{k}}{\sqrt{4+25+16}} = \dfrac{\star}{\sqrt{45}}$

$\vec{U}_{AB} = -0.29\vec{i} + 0.74\vec{j} - 0.59\vec{k}$

$\vec{r} = \vec{AO} = -6\vec{k}$

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -6 \\ 1.5 & -2.12 & 1.5 \end{vmatrix} = -12.72\vec{i} + 9\vec{j} - 0\vec{k}$$

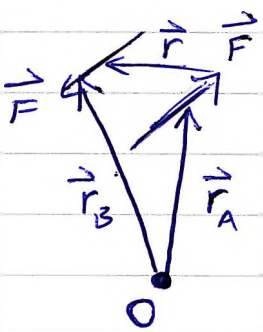
$\vec{M}_A \cdot \vec{U}_{AB} = M_{AB}$

$\vec{M}_{AB} = M_{AB}\,\vec{U}_{AB}$

$M_{AB} = 3.69 + 6.66 = 10.35$

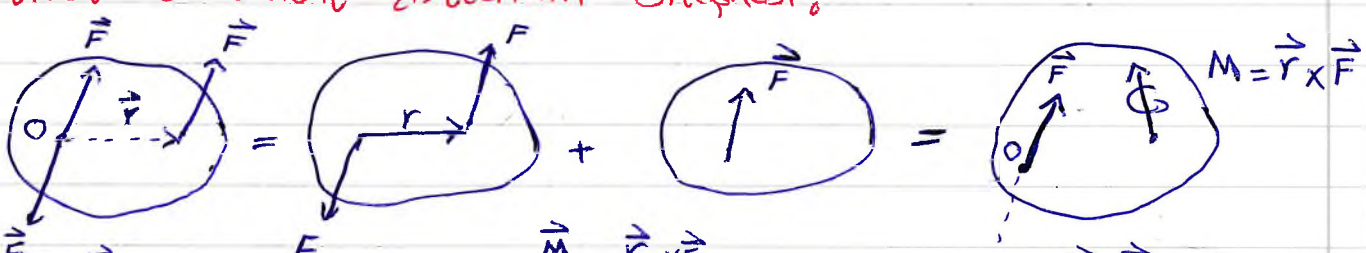
$\vec{M}_{AB} = -3\vec{i} + 7.65\vec{j} - 6.1\vec{k}$

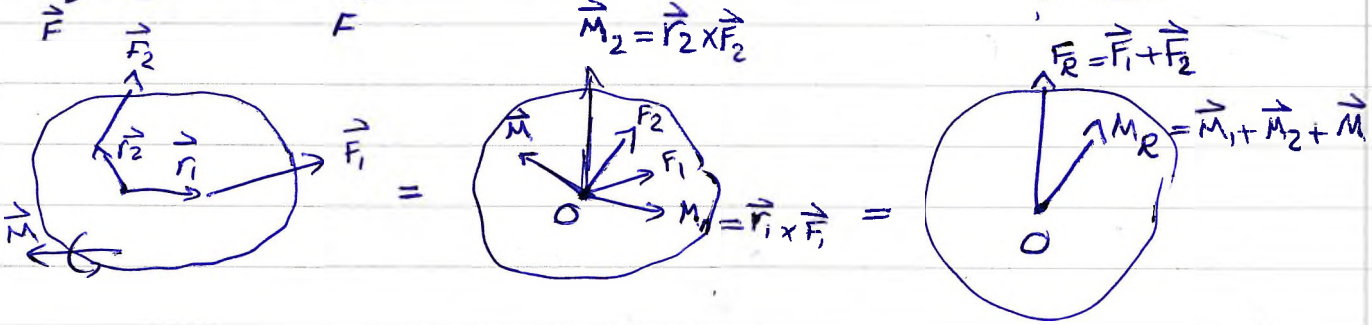
Kuvvet Çifti:



$$M_O = \vec{r}_B \times \vec{F} + \vec{r}_A \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A)\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F}$$

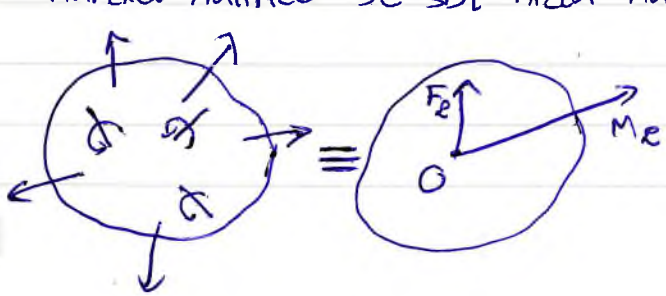
Kuvvet ve moment çiftlerinin Bileşkesi:





2. Statik Denge:

Denge şartı: Denge hareketsiz bir cismin hareketsiz olarak kalması; eğer hareket halinde ise sbt hızla hareketine devam etmesi demektir.

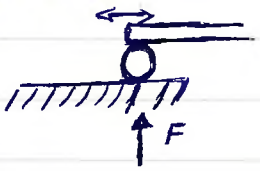


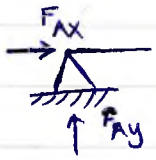
Denge için: $\vec{F}_R = \Sigma \vec{F} = 0$ $\vec{M}_R = \Sigma \vec{M} = 0$

Serbest Cisim Diyagramı:

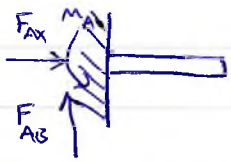
* Mesnet Kuvvetleri:

① Kayıcı mesnet (Roller) ② Sbt mesnet (Pinned)





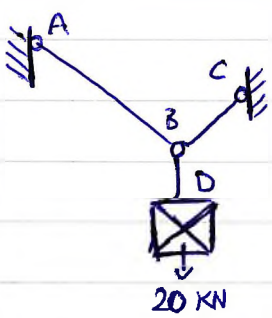
③ Ankastre (Konsol) mesnet (Fixed)



İç ve Dış Kuvvetler:

Serbest Çizim Diyagramı ≠ iç kuvvet

Örnek:



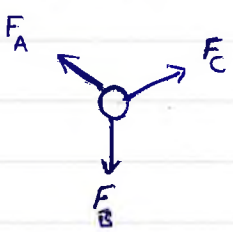
yük için (SCD)



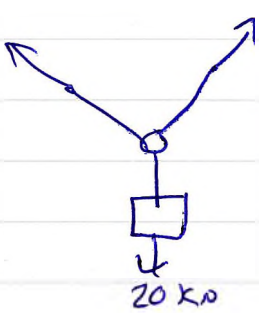
Halat için (SCD)

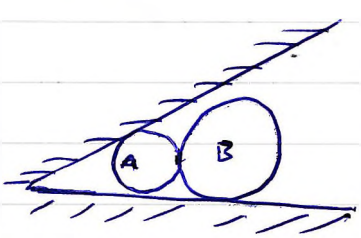


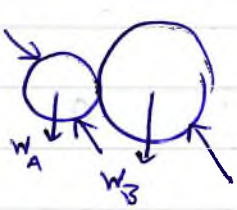
Halka için (SCD)

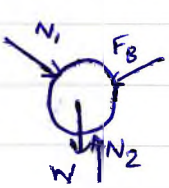


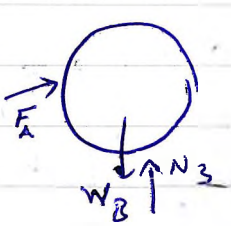
Bütün olarak











Denge Denklemleri

Düzlemde etkiyen kuvvet sisteleri için (x-y düzleminde)

$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ veya $\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ $\Sigma M_C = 0$ bir doğrun üzerinde olamaz

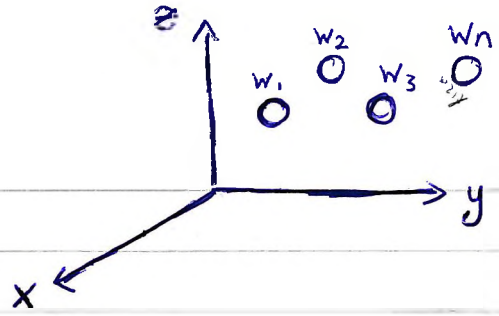
Ayrıca benzer olarak

$\Sigma F_A = 0$ $\Sigma M_A = 0$ $\Sigma M_B = 0$ şeklinde olabilir.

İki kuvvet sisteminin etkisi altındaki elemanlar:

CHPT-3 Geometrik Özellikler

3.1 Ağırlık Merkezi:



Maddesel Nokta sistemi için:

$W_e = W$

$W_e = \tilde{x}_1 W_1 + \tilde{x}_2 W_2 + \cdots + \tilde{x}_n W_n$

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} W}{\sum W}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} w}{\sum w}, \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z} w}{\sum w}$$

Bir Cismin ağırlık merkezi: ($\Sigma \to \int$)

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dw}{\int dw}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\, dw}{\int dw}, \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z}\, dw}{\int dw}$$

$dw = \gamma dV$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} \gamma dV}{\int \gamma dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} \gamma dV}{\int \gamma dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} \gamma dV}{\int \gamma dV}$$

Eğer cisim homojen ise: (bu bize hacim merkezini verecek)

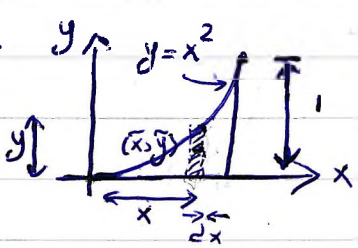
$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dV}{\int dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dV}{\int dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dV}{\int dV}$$

Bir alan için ise biz bunu centroid (geometrik merkezi): $C(\bar{x}, \bar{y})$



$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{\int dA}$$

Örnek: Şekildeki alanın centroid (geometrik merkezi, ağırlık merkezi) bulunuz.



$\tilde{x} = x$

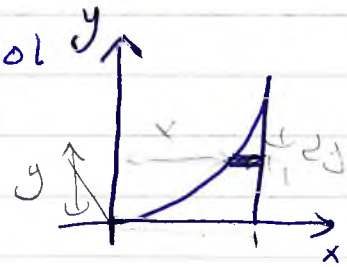
$\tilde{y} = \frac{1}{2} y$

$dA = y \cdot dx$

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 x \cdot y \cdot dx}{\int_0^1 y\, dx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = 0.75\ m$$

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 \frac{y}{2} \cdot y\, dx}{\int_0^1 y\, dx} = \frac{\int_0^1 \frac{x^3}{2} dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{0.1}{0.33} = 0.3\ m$$

2. yol



$\tilde{y} = y$

$dA = (1-x)dy$

$\tilde{x} = x + \frac{(1-x)}{2} = \frac{1+x}{2}$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)(1-x)\, dy}{\int_0^1 (1-x)\, dy} = 0.75\ m$$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

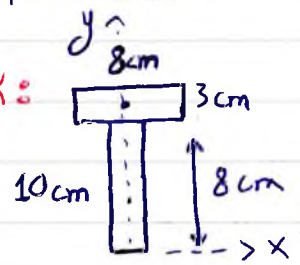
$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 y(1-x)\, dy}{} = \frac{\int_0^1 (y - y^{3/2})\, dy}{} = 0.3\ m$$

3.4 Bileşik Alanların Centroidi (geometrik merkezi)

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$: ~~Her bir parçanın~~ bileşke alanın geo. mer. $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$: Her bir parçanın geo. merkezi

ΣA = Toplam alan

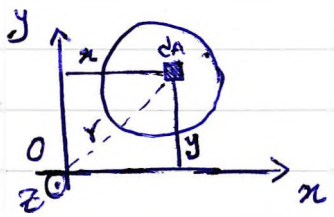
Örnek:



$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} \qquad \bar{y} = \frac{5 \times (10 \times 2) + 11.5 \cdot (3.8)}{(10.2) + (3.8)}$$

x ekseninine göre $\bar{y} = 8.55_{cm}$

3.6 Atalet momentleri



dA alanın x ve y eksenlerine göre atalet momentleri:

$$dI_x = y^2 dA, \quad dI_y = x^2 dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA \rightarrow \text{x eksenine göre A tabanının atalet momenti} \qquad I_y = \int_A x^2 dA \rightarrow \text{y eksenine göre A}$$

O'dan geçen z eksenine göre atalet momenti ise:

$$dI_z = r^2 dA \qquad I_z = \int r^2 dA \qquad I_z = \int (x^2 + y^2) dA \qquad I_z = I_x + I_y = J_o$$

↑ Kutupsal Atalet momenti

I_x, I_y ve J_o pozitiftir. birim: $m^4, mm^4, in^4, Km^4, \ldots$

Ayrıca:

$$S_x = \int y dA, \quad S_y = \int x dA$$

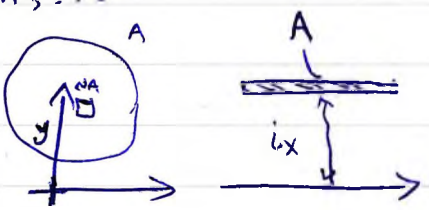
S_x ve S_y: x ve y eksenlerine göre "statik moment" adı verilir.

birim: $m^3, in^3, cm^3, \ldots$

Atalet yarıçapı:

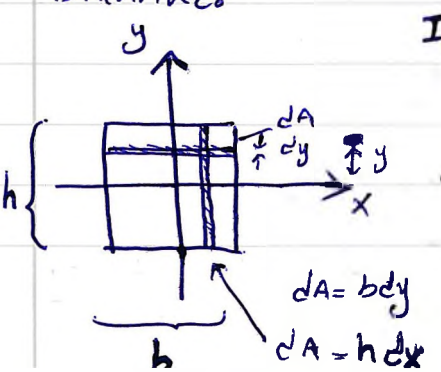
$$I_x = i_x^2 \cdot A \Rightarrow i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

x ekseninine göre Atalet yarıçapı



$$I_y = i_y^2 \cdot A \Rightarrow i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad i_o = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Örnek: Bir dikdörtgenin ağırlık merkezinden (centroidinden) geçen eksenlere göre $I_x, I_y, I_z = I_o = J_o$ atalet momentlerini bulunuz. Atalet yarıçaplarını bulunuz.



$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\, dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \int x^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 h\, dx = x^3 \frac{h}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12} h b^3$$

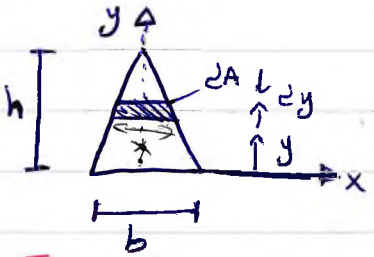
$$I_z = I_o = J_o = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} h b^3 = \frac{A}{12}(b^2 + h^2)$$

Atalet yarıçapları:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12(b\cdot h)}} = \frac{h}{2\sqrt{3}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12(b\cdot h)}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

$$i_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}} = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2\sqrt{3}}$$

Örnek: Bir üçgenin tabanından geçen eksene göre atalet momentini bulunuz.

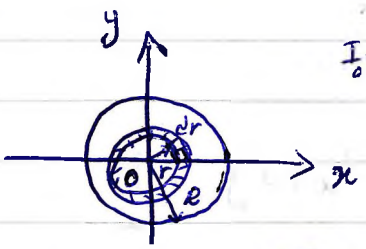


$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \left(\frac{h-y}{h}\right) b\, dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x = \frac{h-y}{h} b$$

$dA = x\, dy$

Örnek: Bir dairenin çapına göre atalet momenti ve kutupsal atalet momenti ve atalet yarıçapını bulunuz. $dA = 2\pi r\, dr$



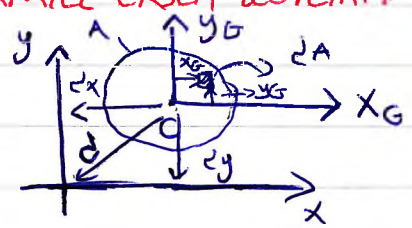
$$I_o = I_z = J_o = \int r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r\, dr = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$I_x = I_y = \frac{J_o}{2} = \frac{\pi R^4}{4} \qquad i_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{2\pi R^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4\pi R^2}} = \frac{R}{2} \qquad I_{xy} = 0$$

EKSENLERİN DEĞİŞTİRİLMESİ:

Paralel eksen teoremi:



x_G, y_G ağırlık merkezinden geçen eksenler

x, y ise x_G, y_G ye paralel eksen takımı.

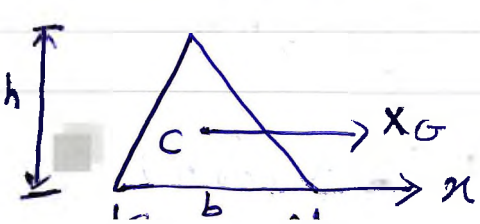
$$I_x = \int_A (dy + y_G)^2 dA = \int_A y_G^2\, dA + 2dy \int_A y_G\, dA + dy^2 \int_A dA$$

$$I_x = I_{x_G} + 2\cdot dy \cdot 0 + dy^2 A$$

$$\boxed{I_x = I_{x_G} + dy^2 A}$$

$$\boxed{I_y = I_{y_G} + dx^2 A} \qquad \boxed{J_o = J_{o_G} + d^2 A}$$

Örnek: Bir üçgenin ağırlık merkezinden geçen eksene göre (ve tabana paralel) atalet momentini bulunuz.

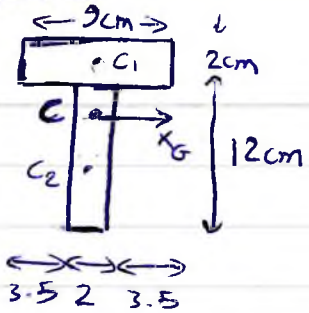


$$I_x = \frac{1}{12} bh^3 \qquad I_x = I_{x_G} + dy^2 A$$

$$I_{x_G} = I_x - dy^2 A = \frac{1}{12} bh^3 - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2} bh\right)$$

$$I_{x_G} = \frac{1}{36} bh^3$$

Örnek: Şekildeki T profilinin ağırlık merkezinden geçen eksene göre atalet momentini bulunuz.



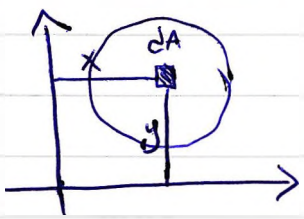
$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = \frac{(2\times12).6 + (9\times2).13}{(2\times12)+(9\cdot2)} = 9\,cm$$

$$I_x = \left(\frac{1}{12}2\cdot12^3 + 3^2\cdot(2\cdot12)\right) + \left(\frac{1}{12}9\cdot2^3 + 4^2(9\times2)\right)$$

$$I_x = 874.5\,cm^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}12\times2^3 + \frac{1}{12}2\times9^3 = 129.5\,cm^4$$

3.7.3 Çarpım atalet momenti: (Cross moment of inertia)



$$I_{xy} = \int_A x.y\,dA$$

Çarpım atalet momenti pozitif, negatif veya sıfır olabilir.

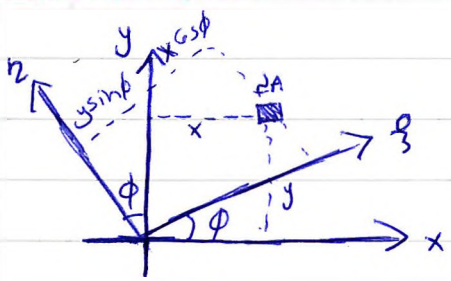
Atalet momenti > 0

Çarpım atalet momenti için paralel eksen teoremi:

$$I_{xy} = \int (x_G + dx)(y_G + dy)\,dA$$

$$\boxed{I_{xy} = I_{x_G y_G} + dx\,dy\,dA}$$

3. Eksenlerin dönmesi



$$\xi = x\cdot\cos\phi + y\sin\phi$$
$$\eta = -x\sin\phi + y\cos\phi$$

$I_\xi, I_\eta, I_{\xi\eta} = ?$

$$I_\xi = \int \eta^2\,dA \qquad I_\xi = \int_A (-x.\sin\phi + y.\cos\phi)^2\,dA =$$

$$I_\eta = \int \xi^2\,dA$$

$$\int_A x^2\sin^2\phi\,dA + \int_A y^2\cos^2\phi\,dA - 2\int_A xy.\sin\phi\cos\phi\,dA$$

$$I_{\xi\eta} = \int 2\xi\,dA$$

$$* I_\xi = I_x\cos^2\phi + I_y\sin^2\phi - 2I_{xy}\sin\phi\cos\phi$$

Benzer olarak

$$* I_\eta = I_x\sin^2\phi + I_y\cos^2\phi + 2I_{xy}\sin\phi\cos\phi$$

$$* I_{\eta\xi} = (I_x - I_y)\sin\phi\cos\phi + I_{xy}(\cos^2\phi - \sin^2\phi)$$

$$I_I = I_x + I_y = I_\xi + I_\eta = sbt$$

$$I_{II} = I_x I_y - I_{xy}^2 = I_\xi I_\eta - I_{\xi\eta}^2 = sbt$$

trigonometrik ilişkiler kullanılırsa: $\left(\sin^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2}\right)$ gibi

* $I_\xi = \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\phi - I_{xy}\sin 2\phi$

* $I_\eta = \frac{I_x+I_y}{2} - \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\phi + I_{xy}\sin 2\phi$

* $I_{\xi\eta} = \frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\phi + I_{xy}\cos 2\phi$

3.7.5

Asal Atalet momentleri:

Atalet momentlerinin Max/min olduğu ekseni (x_1 ve y_1) bulabilmek için $\frac{dI_\xi}{d\phi} = 0$

$$\frac{I_x-I_y}{2}(-2\sin 2\phi) - I_{xy}\,2\cos 2\phi = 0$$

$$\tan 2\phi = \frac{-2I_{xy}}{I_x-I_y}$$ bulunur

Eğer bu açı $I_{\xi\eta}$ ifadesinde yerine konursa $I_{\xi\eta} = 0$ olur.

*

Max ve min atalet momentleri veren eksen takımına göre çarpım atalet momenti sıfır çıkıyor.

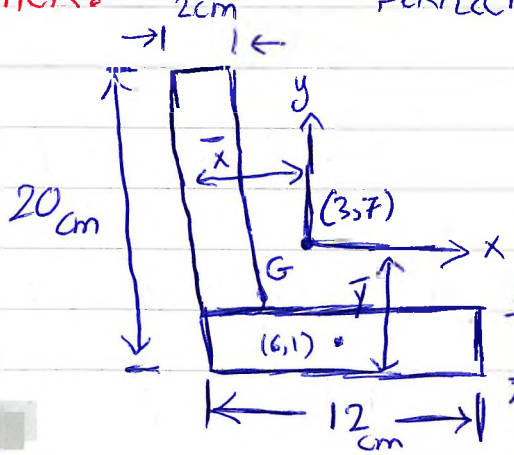
Eğer bu açılar; atalet momenti ifadesinde yerine konursa

$$I_{Max} = I_1 = \frac{I_x+I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{min} = I_2 = \frac{I_x+I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

} Asal atalet momentleri

Örnek: Şekildeki kesitin asal atalet momentlerini bulunuz.



Ağırlık merkezi:

$$\bar{x} = \frac{12*2*6 + 18*2*1}{12*2+18*2} = 3\,cm$$

$$\bar{y} = \frac{12\times 2\times 1 + 18\times 2\times 11}{12\times 2 + 18\times 2} = 7\,cm$$

$$I_x = \left(\frac{1}{12}12\cdot 2^3 + (12\times 2)\times 6^2\right) + \left(\frac{1}{12}2\times 18^3 + (18\times 2)\times 1^2\right) = 2420\ cm^4$$

$$I_y = \left(\frac{1}{12}2\times 12^3 + 2\times 12\times 3^2\right) + \left(\frac{1}{12}\times 18\times 2^3 + 18\times 2\times 2^2\right) = 660\ cm^4$$

$$I_{xy} = \left(0 + (12\times 2)\times 3\times(-6)\right) + \left(0 + (18\times 2)\times(-2)(4)\right) = -720\ cm^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$\begin{cases} I_1 = 2680\ cm^4 & \text{en büyük} \\ I_2 = 400\ cm^4 & \text{en küçük} \end{cases}$

$$\tan 2\phi = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-2\times(-720)}{2420-660} = 0.818 \Rightarrow 2\phi = 39.3^\circ$$

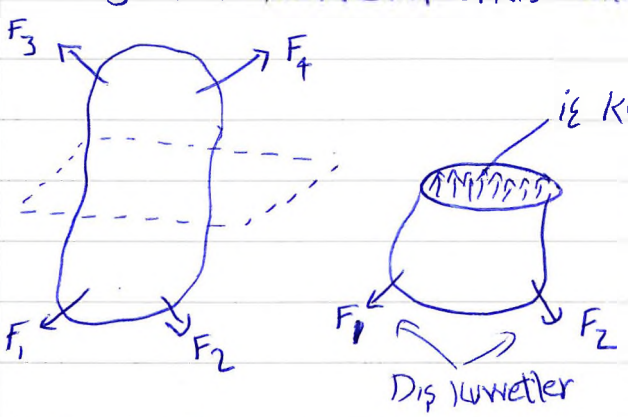
$$\phi = 19.65^\circ$$

CHPT-4 İç Kuvvetler (Internal loadings)

İç kuvvetler; dış kuvvetlere maruz bir cismin bir bütün olarak kalmasını sağlar.

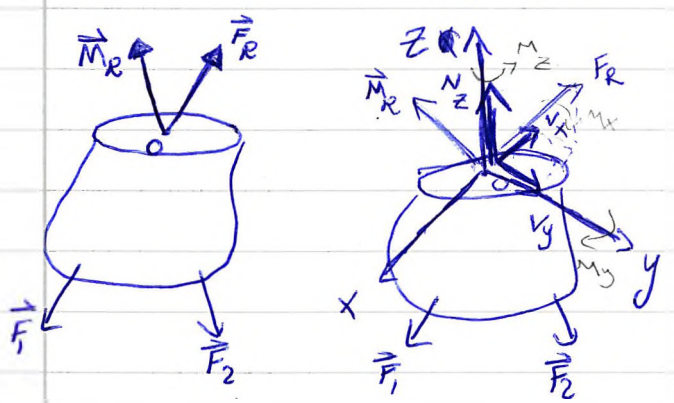
İç kuvvetleri elde etmek için cismin hayali bi iki parçaya ayıracağız. (Method of section)

Örneğin 4 kuvvetin etkisi altındaki cismi düşünelim



Kesilen parça dengede olmalıdır. (iç ve dış kuvvetler etkisi altında)

İç kuvvetlerin bileşkesini bir noktaya taşıyabiliriz. (Statik prensipleri kullanarak). Diyelim ki cismin kesitinin ağırlık merkezine taşıdık.



N_z: Normal kuvvet, kesit alanına dikdir, bu cins iç kuvvetler eğer cisim çekmeye veya basmaya zorlanıyorsa ortaya çıkar.

$\vec{V}$: Kesme kuvveti, iki bileşeni vardır.

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

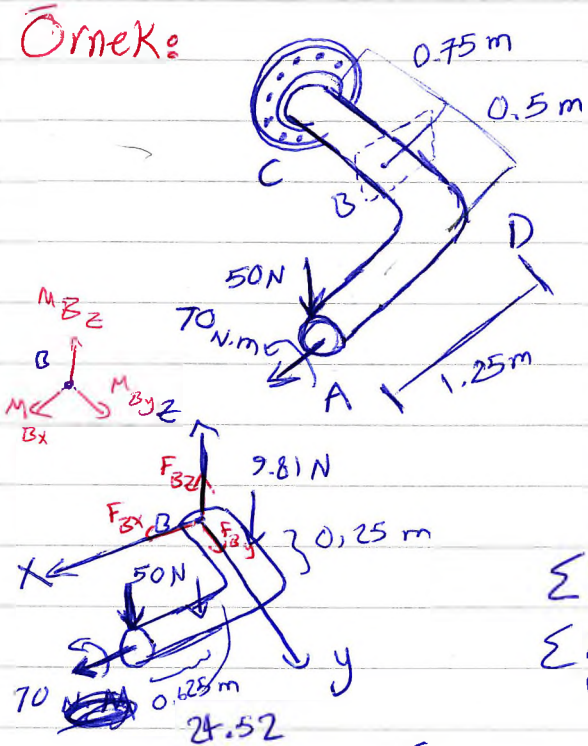
Cismi kesmeye zorladığımız zaman oluşur

$\vec{M}_z$ = Tork = $\vec{T}_z$ = Burulma momenti adı verilir. Cisim burulmaya zorlanırsınsa ortaya çıkar.

$\vec{M}$: eğilme momenti. İki bileşeni vardır. $\vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y$

Cisim eğilmeye zorlanırsı zaman ortaya çıkar.

Örnek:



şekildeki çubuk B kesitinde oluşacak olan bileşke iç kuvvet ve momentleri bulunuz. Çubuğun kütlesi 2kg/m'dir.

Çubuğun ağırlığı:

$W_{BD} = 2\frac{kg}{m} \times 0.5 \times 9.81 = 9.81\,N$

$W_{AD} = 2\frac{kg}{m} \times 1.25m \times 9.81\frac{N}{kg} = 24.52\,N$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Bx} = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{By} = 0$

$\sum F_z = 0 \Rightarrow$

$F_{Bz} - 9.81 - 24.52 - 50 = 0$

$F_{Bz} = 84.3\,N$

$\sum M_x = 0 \Rightarrow$

$M_{Bx} + 70 - (50 \times 0.5) - (24.52 \times 0.5) - (9.81 \times 0.25) = 0$ $\quad M_{Bx} = -30.3\,N.m$

$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_{By} + (24.52 \times 0.625) + (50 \times 1.25) = 0$ $\quad M_{By} = -77.8\,N.m$

$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_{Bz} = 0$

Normal kuvvet: $N = F_{By} = 0$

Kesme kuvveti: $V = \sqrt{F_{Bz}^2 + F_{Bx}^2} = \sqrt{0 + 84.3^2} = 84.3\,N$

Burulma momenti: $T = M_{By} = 77.8\,N.m$

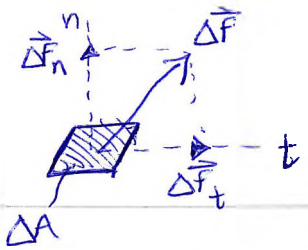
Eğilme momenti: $M = \sqrt{M_{Bx}^2 + M_{Bz}^2} = \sqrt{30.3^2 + 0^2} = 30.3\,N.m$

4.2 Gerilme ve Birim Uzama (stress & strain)

4.2.1 Gerilme

Alan küçüldükçe o alana etkiyen kuvvetler gittikçe daha kuvvetli çekilecektir.





$\Delta A \to 0 \Rightarrow \Delta\vec{F} \to 0$ Ancak bu iki değerin birbirine bölümü sonlu bir değerdir.
Biz bu bölüme "gerilme" adını vereceğiz.
gerilme; bir düzlemdeki kuvvetin yoğunluğunu ifade eder.

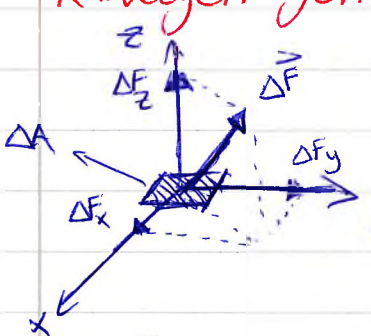
Normal gerilme: Yüzeye normal etkiyen kuvvetin yoğunluğudur. (birim alana etkiyen dik kuvvet)

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A}$$ (tensile stress) Eğer ΔF_N kuvveti çekme ise: σ çekme gerilmesi
(compressive stress) " " basma ise: σ basma gerilmesi

Kayma gerilmesi: Alana etkiyen teğetsel kuvvetin yoğunluğudur. Biz buna "kayma gerilmesi" (shearing stress)

$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A}$$

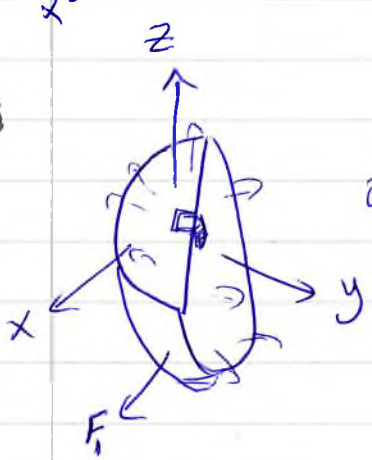
Kartezyen gerilme bileşenleri:

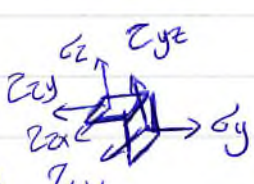


$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$

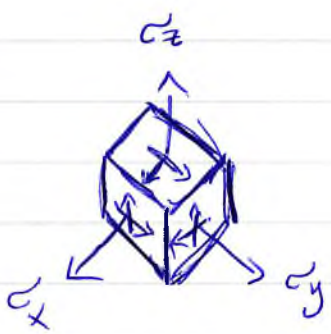
Normal yönlü: $\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$

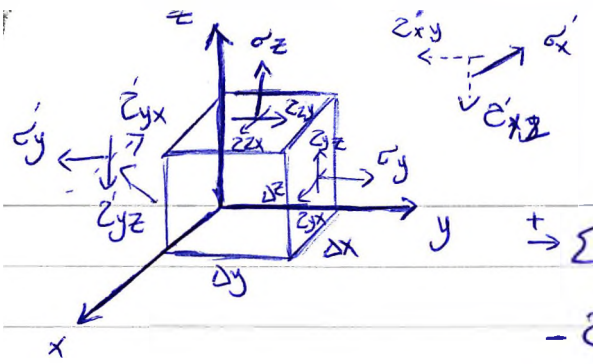
Kuvvet yönü: $\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$











Ortaya çıkan Kübik elemanında dengede olması gerekir. O halde Denge denklem sağlamalı.

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_y = 0 \Rightarrow \sigma_y(\Delta x.\Delta z) - \sigma'_y(\Delta x.\Delta z) + \tau_{zy}(\Delta x.\Delta y) - \tau'_{zy}(\Delta x.\Delta y) + \tau_{xy}(\Delta z.\Delta y) - \tau'_{xy}(\Delta z.\Delta y) = 0$$

$\Delta y \to 0 \Rightarrow \sigma_y(\Delta x.\Delta z) - \sigma'_y(\Delta x.\Delta z) = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_y = \sigma'_y}$

$\Delta z \to 0 \Rightarrow \tau_{zy}(\Delta x \Delta y) - \tau'_{zy}(\Delta x.\Delta y) = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{zy} = \tau'_{zy}}$

$\Delta x \to 0 \Rightarrow \tau_{xy}(\Delta z \Delta y) - \tau'_{xy}(\Delta z.\Delta y) = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau'_{xy}}$

Benzer olarak $\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \sigma'_x}$ $\boxed{\tau_{zx} = \tau'_{zx}}$ $\boxed{\tau_{yx} = \tau'_{yx}}$

$\overset{+}{\uparrow} \sum F_z = 0$ $\boxed{\sigma_z = \sigma'_z}$ $\boxed{\tau_{xz} = \tau'_{xz}}$ $\boxed{\tau_{yz} = \tau'_{yz}}$

Sonuç olarak eğer $\Delta x, \Delta y$ ve Δz sıfıra yaklaşırsa kübik elemanın yüzeyine etkiyen normal ve kayma gerilmeleri; karşı yüzeylerine etkiyen normal ve kayma gerilmelerine eşit ve zıt yöndedir. Ayrıca denge için moment dengesi de gerekir. Yani x, y, ve z eksenlerine göre kübik elemanın moment dengesi gerekir.

$\sum M_x = 0 \Rightarrow \tau_{yz}(\Delta x \Delta z)\Delta y - \tau_{zy}(\Delta x.\Delta y)\Delta z = 0$

$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$

$\sum M_z = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$

$\sum M_y = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\tau_{zx} = \tau_{xz}}$

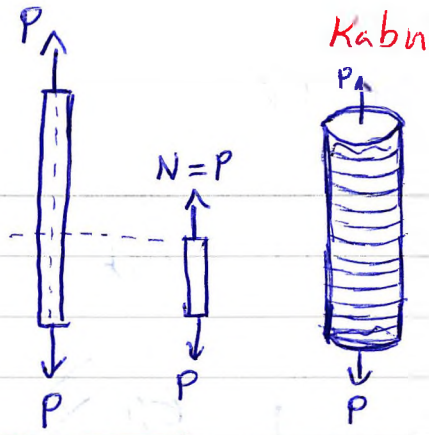
Toplam olarak 6 bilinmeyen var $\begin{cases} \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \\ \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \end{cases}$

4.2.2 Eksenel yüklü çubuklarda ortalama gerilme:

Çubuklar: Kendi eksenleri doğrultusunda kuvvet taşıyan yapı elemanıdır.

Kabuller:

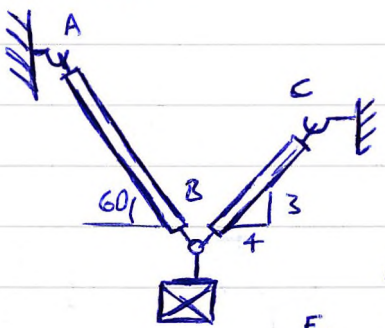
* Malzeme homojen (Mekanik özellikler her noktada aynı)
* Malzeme izotropik (Mekanik özellikler her doğrultuda aynı)



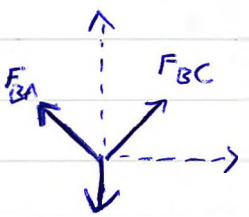


$$\sigma_{ort} = \frac{P}{A}$$

Örnek:



80 kg'lık yük AB ve AC çubukları ile asılmıştır. Eğer AB çubuğunun çapı 10 mm, BC'nin ise 8mm ise; hangi çubukta normal gerilme daha büyük olacaktır.



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC}\left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA}\cos 60 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BC}\left(\frac{3}{5}\right) + F_{BA}\sin 60 - 784.8 = 0$$

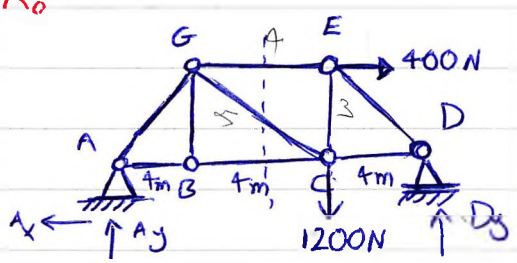
$$\Rightarrow F_{BC} = 395.2\,N,\quad F_{BA} = 632.4\,N$$

Ortalama Normal Gerilme:

Önce kopar

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{395.2}{\pi(0.004)^2} = 7.86\,MPa \qquad \sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{632.4}{\pi\times(0.005)^2} = 8.05\,MPa$$

Örnek:

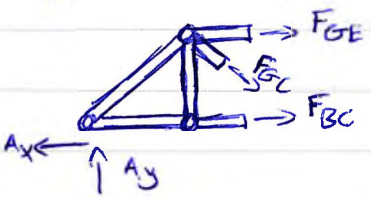


GE, GC ve BC çubuk kuvvetlerini bulunuz. Bu çubuklardaki gerilmelerin çekmemi basmamı olduğunu bulunuz. ($\phi_{GE} = 10mm$, $\phi_{GC} = 2$ cm, $\phi_{BC} = 8mm$)

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 400 - A_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 400N}$$

$$\curvearrowright +\sum M_A = 0 \Rightarrow -1200.8 - 400\times 3 + D_y.12 = 0 \Rightarrow \boxed{D_y = 900N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 1200 + 900 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 300\,N}$$



$$\sum M_G = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BC} = 800N} \text{ (Çekme)}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow \boxed{F_{GE} = -800N} \text{ (Basma)}$$

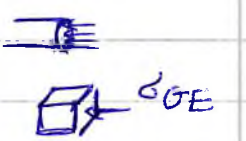
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_{GC} = 500} \text{ (Çekme)}$$

Normal gerilmeler:

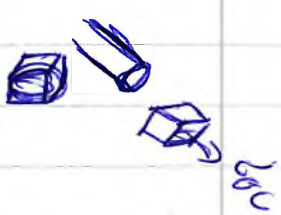
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{800}{\frac{\pi 8^2}{4} \times 10^{-6}} = 15.91 \text{ mPa (Çekme gerilmesi)}$$



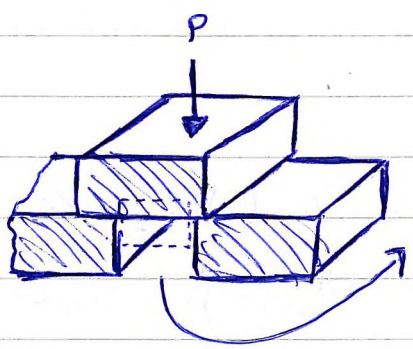
$$\sigma_{GE} = \frac{F_{GE}}{A_{GE}} = \frac{-800}{\frac{\pi 10^2}{4} \times 10^{-6}} = -10.18 \text{ mPa (Basma gerilmesi)}$$

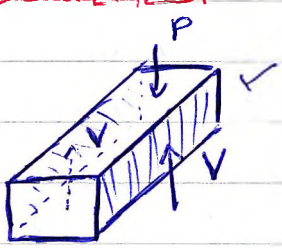


$$\sigma_{GC} = \frac{F_{GC}}{A_{GC}} = \frac{500}{\frac{\pi \times 2^2}{4} 10^{-4}} = 1.59 \text{ mPa (Çekme gerilmesi)}$$

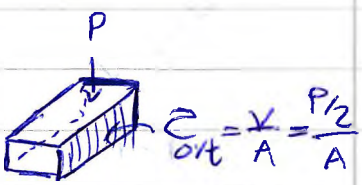


4.2.3 ORTALAMA KAYMA GERİLMESİ



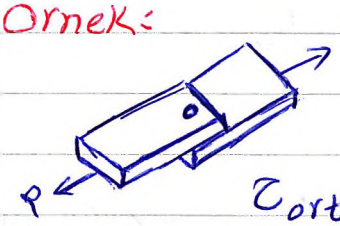


Kesilme yüzeyleri



$$\tau_{ort} = \frac{V}{A}$$ ← Kesme Kuvveti, ← Alan

Örnek:

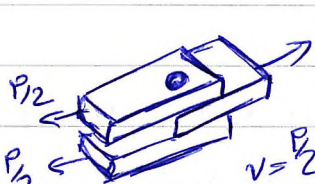


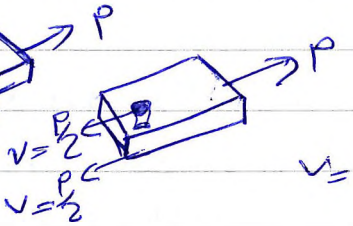
$$\tau_{ort} = \frac{P/2}{A_c}$$



3 civata olsaydı $V = P/3$

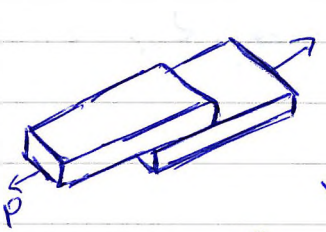
$$\tau_{ort} = \frac{P/3}{A_c}$$

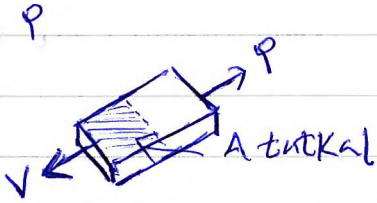




$$\tau_{ort} = \frac{V}{A_c} = \frac{P}{2A_c}$$

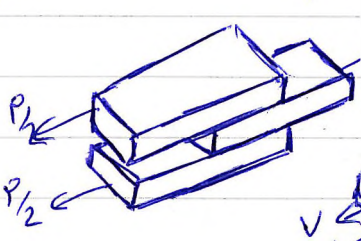
$V = P/2$





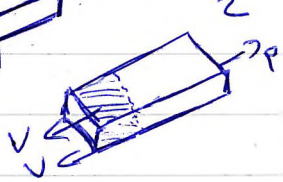
$V = P$

$$\tau_{ort} = \frac{V}{A_{tutkal}} = \frac{P}{A_{tutkal}}$$



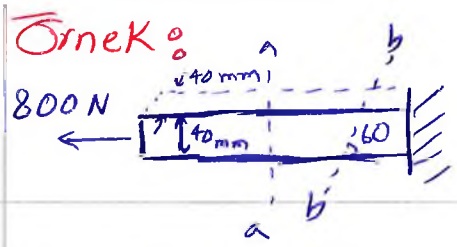
$V = P/2$

$$\tau_{ort} = \frac{P/2}{A_{tutkal}}$$



(15)

Örnek:



a) aa kesitinde ortalama normal ve kayma gerilmelerini

b) bb " bulunuz

a)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V = 0$

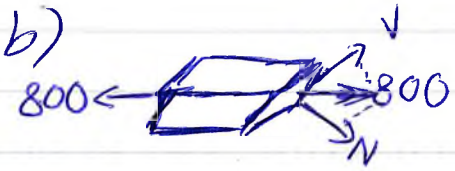
$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow M = 0$

$\Sigma F_x = 0 \quad 800 - N = 0 \Rightarrow \boxed{N = 800\ N}$

$\sigma_{ort} = \frac{N}{A} = \frac{800}{(0.04)^2} = 500\ kPa$ (tension)

$\tau_{ort} = \frac{V}{A} = \frac{0}{A} = 0$

b)



$\Sigma F_x = 0 \quad -800 + N\sin 60 + V\cos 60 = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad V\sin 60 = N\cos 60$

$N = 692.8\ N \quad V = 400\ N$

$\sigma_{ort} = \frac{N}{A} = \frac{692.8}{0.04 \times \frac{0.04}{\sin 60}} = 375\ kPa$

$\tau_{ort} = \frac{V}{A} = \frac{400}{0.04 \times \frac{0.04}{\sin 60}} = 217\ kPa$



1.2.6 Deformasyon (şekil ve boyut değiştirme)

Bir cisme bir kuvvet uygulandığında cismin şekli ve/veya boyutları değişir. Bu deformasyonlar çıplak gözle görülebilir/veya görülemez. Ayrıca sıcaklık değişimlerinde deformasyona neden olur.

Deplasman (Displacement) ise bir noktanın diğer bir noktaya yer değiştirmesini gösteren vektörel bir büyüklüktür.

Deformasyon ölçmek demek bu uzunluktaki boyların değişmelerini ve de bu iki doğru arasında kalan açının değişimini ölçmek demektir.



Def.den önce

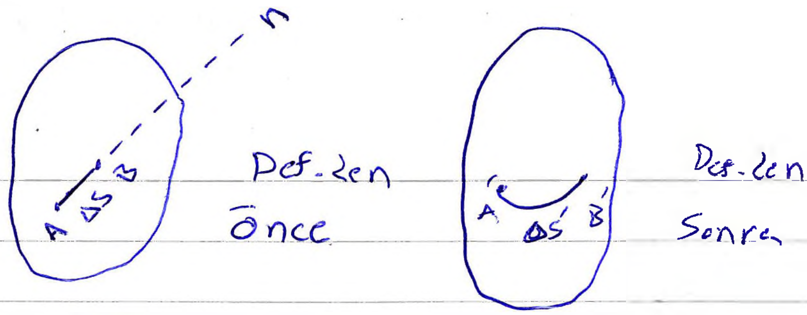


Def.den sonra

1.2.7 STRAIN (gerilim, birim uzama (kısalma), birim şekil değiştirme)

Bir doğrunun boyundaki değişimi ve ilgi doğru arasında kalan açıdaki değişmeyi tanımlamak için kullanılır.

Normal Strain: Bir doğru parçasının birim uzaması veya kısalmasına "normal strain" denir.



AB doğrusunun düşünelim n-doğrultusundaki, uzunluğu ΔS olsun. Def.dan sonra $A \to A'$ ve $B \to B'$ olsun ve uzunluğu $\Delta S'$ olsun

$\Delta S' - \Delta S \Rightarrow$ boyutdaki değişme

ortalama normal strain:

$$\varepsilon_{ort} = \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S}$$ olarak tanımlanır.

Eğer B noktasını A'ya gittikçe yaklaşan bir nokta olarak seçersek, aradaki doğru parçasının boyu sıfıra yaklaşır. $\Delta S \to 0$

Dolayısıyla B' da A'ne yaklaşır ve $\Delta S' \to 0$

Sonuç olarak, A noktasında n doğrultusunda normal strain

$$\varepsilon = \lim_{B \to A} \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S}$$

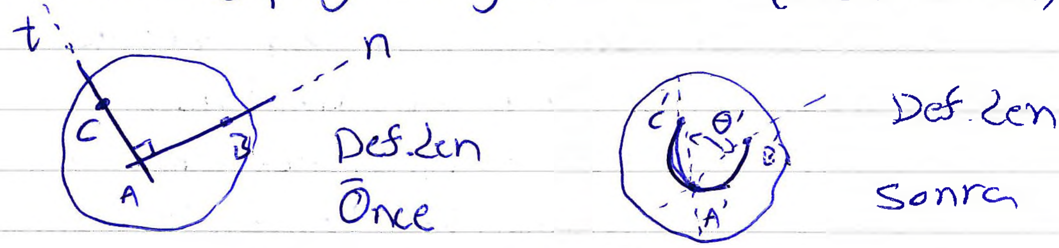
Eğer normal strain biliniyorsa; deformasyondan sonraki doğru parçasının uzunluğu yaklaşık olarak

$$\Delta S' \cong (1+\varepsilon)\Delta S$$ olacaktır. O halde

$$\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \Delta S' \approx \Delta S$$

Birimi: Normal strain boyutsuzdur.

Kayma STRAINi: Birbirine dik iki doğru parçası arasındaki açıdaki değişmeye "kayma straini" (shear strain) denir.



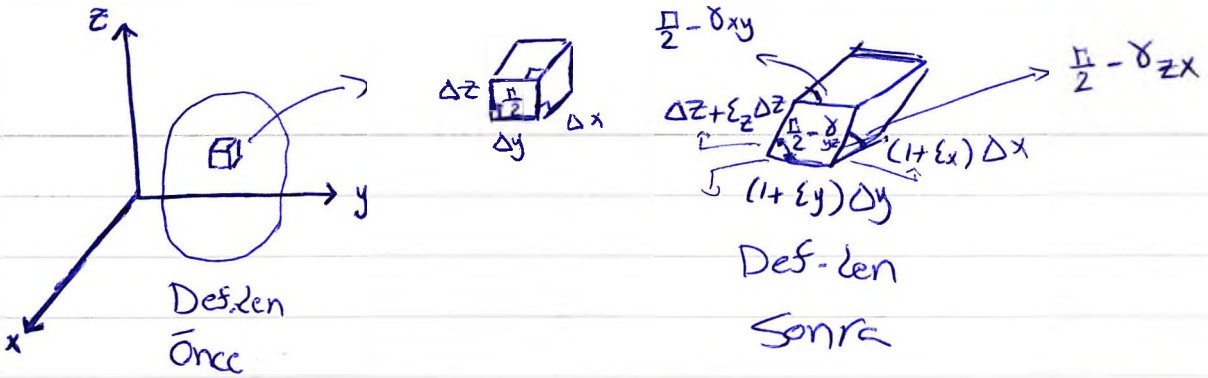
A noktasında n ve t doğrultusuyla ilgili "kayma straini":

$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{B \to A \text{ (n doğrultusunca)} \\ C \to A \text{ (t ")}}} \theta'$$

Eğer açı $(\theta' > \frac{\pi}{2})$ negatif $(\theta' < \frac{\pi}{2})$ pozitif kayma straini vardır.

kayma straini $\gamma_{nt} \to$ radyan olarak ölçülür.

Kartezyen Koordinatlarda STRAIN Bileşenleri:



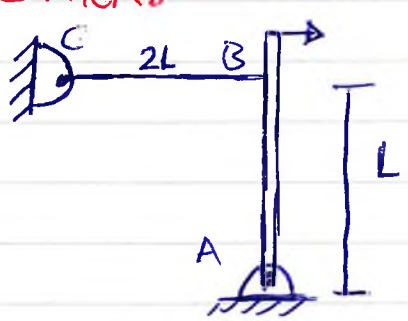
Kübik elemanın boyutları $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ iken $(1+\varepsilon_x)\Delta x, (1+\varepsilon_y)\Delta y, (1+\varepsilon_z)\Delta z$ olacaktır. Daha önce $\frac{\pi}{2}$ olan açı ise

$(\frac{\pi}{2}-\gamma_{xy}), (\frac{\pi}{2}-\gamma_{xz}), (\frac{\pi}{2}-\gamma_{yz})$ olmuştur.

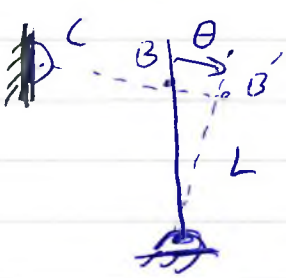
((Normal strain boyut değişimine kayma straini ise şekil değişimine neden olur.))

Özet olarak bir cismin içerisindeki bir noktaya strain durumu (state of strain) 3 normal strainin $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ve 3 kayma strainine γ_{xy}, γ_{xz} & γ_{yz} değerlerinin belirtilmesini gerektirir. Eğer bütün noktalardaki strain durumu tanımlanmışsa deforme olmuş cisim belirlenmiştir. Eğer bir noktadaki strain bileşenlerini biliyorsak dönüşümler yapılarak diğer doğrultudaki strainler bulunabilir.

Örnek:



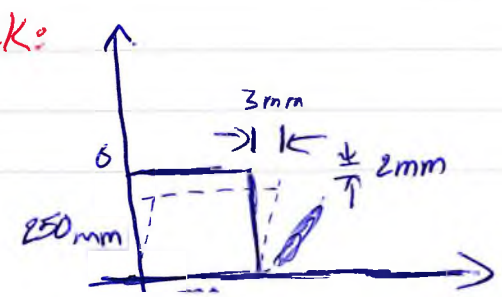
Eğer kol saat yönünde $\theta = 0.002$ rad döndürülürse, BC kablosunda oluşan ortalama normal straini bulunuz.



$$\varepsilon_{ort} = \frac{CB' - CB}{CB} = \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S}$$

$$= \frac{L\cdot\theta}{2L} = \frac{\theta}{2} = \frac{0.002}{2} = 0.001$$

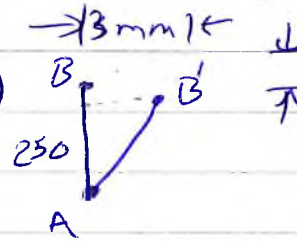
Örnek:



Şekildeki plaka gösterildiği gibi deforme olmuştur: yatay çizgiler yatay kalmıştır.

a) AB doğrultusundaki ortalama normal strainı,
b) Ortalama kayma strainini (x ve y eksenine göre) bulunuz.

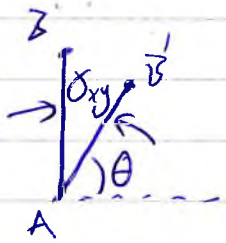
a.)



$$AB' = \sqrt{(250-2)^2 + 3^2} = 248.018\ mm$$

$$(\varepsilon_{AB})_{ortalama} = \frac{AB' - AB}{AB} = \frac{248.018 - 250}{250} = -7.93 \times 10^{-3}\ \frac{mm}{mm}$$

b)

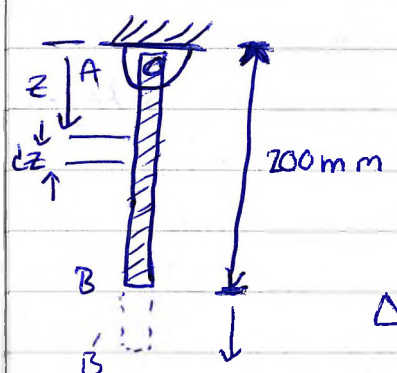


$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\gamma_{xy} = \tan^{-1}\left(\frac{3mm}{250-2}\right) = 0.0121\ rad$$

pozitif $\Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

Örnek: Şekildeki çubuk artırılan sıcaklık nedeniyle normal strain'e maruz kalmıştır. Normal strain: $\varepsilon_z = 40 \times 10^{-3} \times z^{1/2}$ olarak verilmiştir.



a) B noktasının meydana gelen deplasmanı bulunuz.
b) Çubuktaki ortalama strainı bulunuz.

$$\Delta s' = (1+\varepsilon)\Delta s \qquad dz' = [1 + 40\times10^{-3} \times z^{1/2}]\, dz$$

$$L' = \int_0^{0.2m} [1 + 40\times10^{-3} \times z^{1/2}]\, dz = 0.20239\ m$$

$$\Delta_B = L' - L = 2.39\ mm \downarrow$$

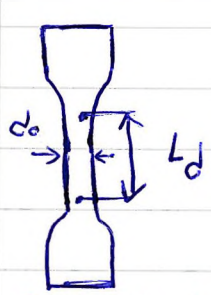
b) $$\varepsilon_{ort} = \frac{L'-L}{L} = \frac{2.39}{200} = 0.0119\ \frac{mm}{mm}$$

CHPT-5 Katı Cisimlerin mekanik Özellikleri:

Bu bölüme kadar gerilme ve birim şekil değiştirme kavramlarını gördük, bu bölümde ise gerilme ve şekil arasında nasıl bir bağlantı oluşturacağız. Deneysel olarak bu ilişkinin nasıl oluşturulduğunu ve sık olarak kullanılan malzemeleri (çelik gibi) diyagramlarını nasıl çizileceğini göreceğiz.

5.1 Çekme ve Basma Deneyi

Bu kullanılan en yaygın metodudur. . . .

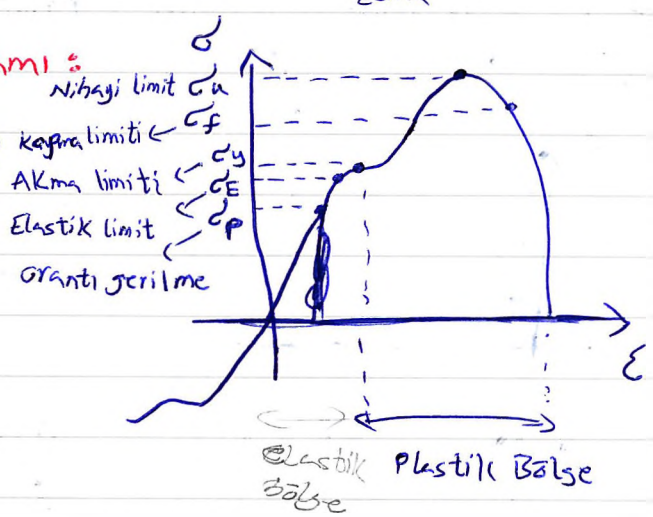


5.2 Gerilme-Şekil Değiştirme Diagramı:

$$\sigma = \frac{P}{A_o} \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o} = \frac{L - L_o}{L_o}$$

σ ↓ Nominal gerilmesi

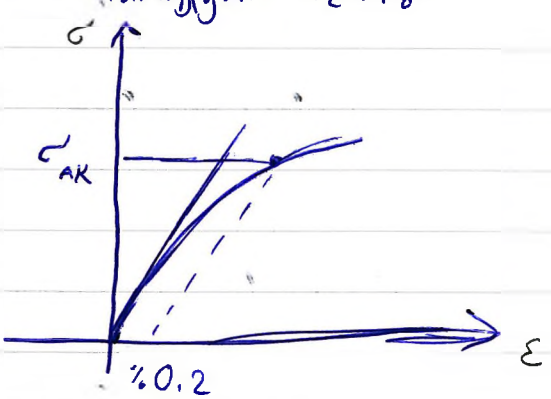
Çelik



Elastik, Plastik

σ_p (orantılılık)

Alüminyum için:



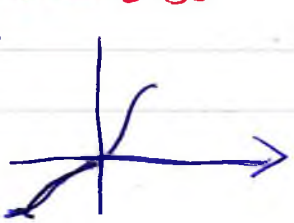
Pekleşme: Diyagramda tekrar bir yükselme görülebilir.

σ_u: Çekme mukavemeti (nihayi gerilme) = Diyagramdaki en tepe nokta

σ_f = Kopma gerilmesi (malzeme bu noktada kopar)

5.3 Bazı yaygın malzemeler için σ-ε Diyagramı:

Bronz

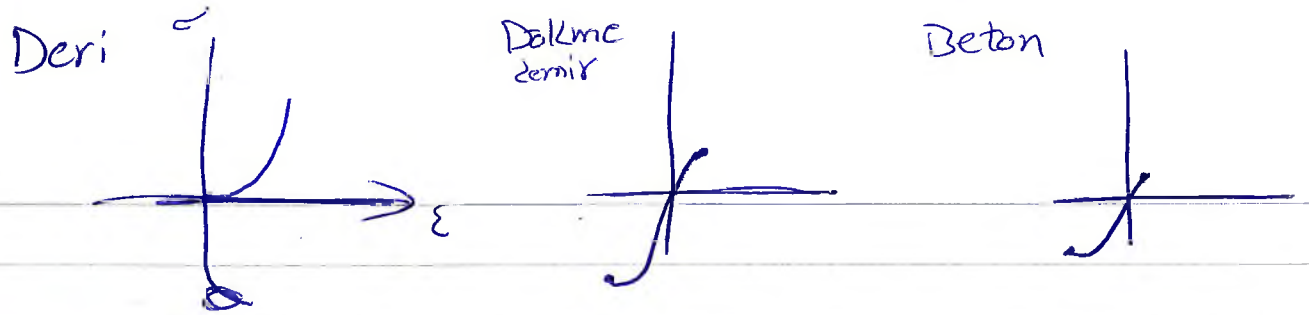


Mermer



Ahşap





5.4

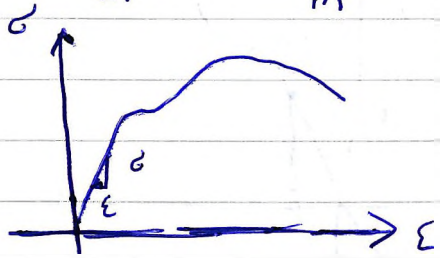
Gevrek malzeme: Kopmadan önce büyük uzama göstermeyenler (Dökme demir)
Sünek " : Büyük uzama gösteriyor

5.5 Hook Kanunu (Robert Hook, 1676)

$\sigma \propto \varepsilon$ $\quad \sigma = E \cdot \varepsilon$ (gerilim ile strain orantılıdır. Orantı katsayısı ise E' dir)

E: Elastisite modülü (Young modülü)

$E \rightarrow \frac{N}{m^2}$, Pa, $\frac{kgf}{m^2}$, ...



* Lineer kısmın eğimi E katsayısını verir.



Çelikler
Çeşitli ~~çeşitler~~ için grafik:

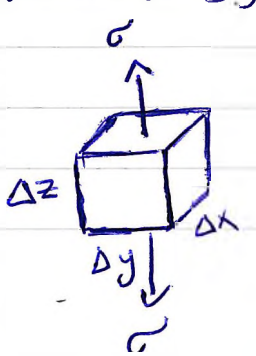
$E \approx 200\,GPa$

↓
Çelik için

E → malzemenin katılığını (stiffness) gösterir

5.6 Şekil değiştirme enerjisi (Strain Energy)

Cisimler dış kuvvetler etkisinde şekil değiştirirken bu sırada bir iç enerji depo ederler ~~bu~~ enerji malzemenin deformasyonuna bağlı olduğu için ona şekil değiştirme enerjisi (strain energy) denir.



$\Delta F = \sigma (\Delta x \cdot \Delta y)$

Bu kuvvet etkisinde eleman $\varepsilon_z \cdot \Delta z$ kadar uzar.

$Work = \Delta U = \frac{1}{2} \Delta F (\varepsilon \cdot \Delta z)$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\sigma(\Delta x \cdot \Delta y)(\varepsilon \cdot \Delta z) = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

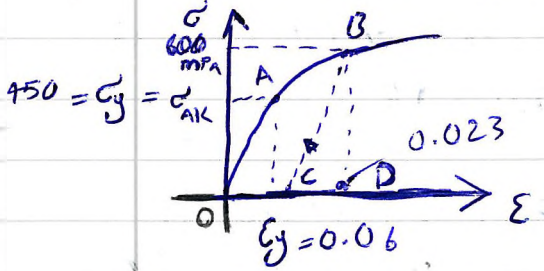
$$\Delta U = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon \cdot \Delta V \qquad u = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon$$

Şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu (birim hacim başına strain energy)



$$\frac{1}{2}F_1\Delta_1 + \frac{1}{2}F_2\Delta_2 + F_1\Delta_2$$

Örnek: Şekilde uçak parçalarının yapımı için kullanılan alüminyum alaşımın gerilme-şekil değiştirme (stress-strain) diyagramı verilmiştir. Eğer numuneye 600 MPa gerilme uygulanır ve uygulanan kuvvet kaldırılırsa oluşacak kalıcı strainı bulunuz.



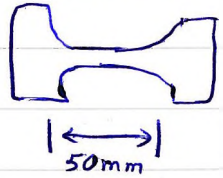
Diyagramda $\sigma = 600$ MPa karşılık gelen strainini $\varepsilon = 0.023 \frac{mm}{mm}$ olduğunu farzedelim.

$$E = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{450}{0.006} = 75\ GPa$$

ΔCBD'den $E = \frac{BD}{CD} = \frac{600 \times 10^6}{CD} = 75 \times 10^9$ $\quad CD = 0.008 \frac{mm}{mm}$

Kalıcı (Permanent strain) birim uzama = $\varepsilon_{oc} = 0.023 - 0.008 = 0.015 \frac{mm}{mm}$

Eğer numunede



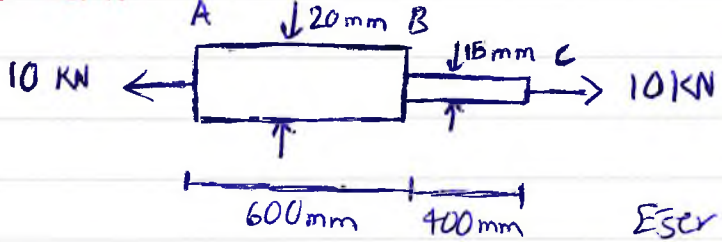
$\Delta L = \varepsilon_o \cdot L_o$

600 mPa gerilme uygulandıktan sonra tekrar serbest bırakıldıktan sonra yeni boy:

$L = L_o + \Delta L$

$L = 50 + \varepsilon_{oc} \cdot L_o = 50 + 50 \times 0.015 = 50.75$ mm

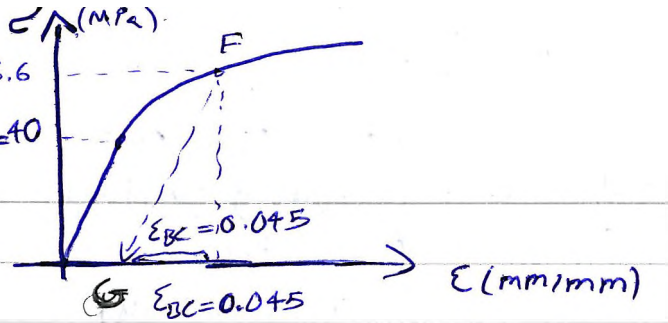
Örnek:



Kullanılan malzeme ile ilgili stress-strain diyagramının bir kısmı verilmiştir.

Eğer uygulanan kuvvet kaldırılırsa çubuk original boyutlarına geri döner mi?

($E_{AL} = 70$ GPa $= 70 \times 10^9$ Pa)



$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A_{AB}} = \frac{10 \times 10^3 N}{\pi \times 0.01^2} = 31.8 \times 10^6 \text{ Pa}$$
$$= 31.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A_{BC}} = \frac{10 \times 10^3 N}{\pi \times 0.075^2} = 56.6 \times 10^6 \text{ Pa}$$
$$= 56.6 \text{ MPa}$$

AB bölgesi için:

$\sigma_{AK} = \sigma_y = 40 \text{ MPa} > \sigma_{AB} = 31.8 \text{ MPa}$ o halde AB bölgesi tümüyle elastiktir.

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{AB}} = \frac{31.8 \times 10^6}{70 \times 10^9} = 0.0004543 \frac{mm}{mm}$$

BC kısmında ise

$\sigma_{AK} = 40 \text{ MPa} < \sigma_{BC} = 56.6 \text{ MPa}$ o halde BC bölgesi plastiktir.

Grafikten $\sigma_{BC} = 56.6$ MPa için $\varepsilon_{BC} = 0.0450 \frac{mm}{mm}$ olmuştur.

O halde 10 KN'luk kuvvet etkiyorken çubuktaki toplam uzama:

$$\Delta = \sum \varepsilon \cdot L = (0.0004543)(600) + (0.045)(400) = 18.3 \text{ mm}$$

Eğer 10 KN'luk kaldırılırsa, AB kısmı orijinal boyuna geri döner. BC kısmında ise bir miktar kalıcı uzama olacaktır.

FG'nin eğimi E_{AL}, geri dönen strain

$$\varepsilon_{\text{geri dönen}} = \frac{\sigma_{BC}}{E_{AL}} = \frac{56.6 \times 10^6}{70 \times 10^9} = 0.000808 \frac{mm}{mm}$$

Kalıcı plastik strain:

$\varepsilon_{OG} = 0.045 - 0.000808 = 0.0442 \frac{mm}{mm}$

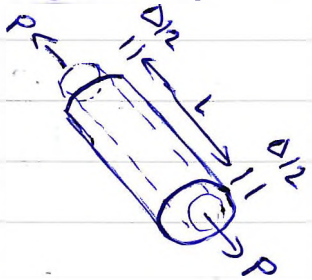
Sonuç olarak;

$L' = L_{AB} + L_{BC} + \Delta l_{AB} = 600 + 400 + 0.0442 \times 400$

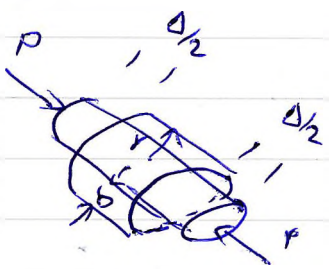
$L' = 1017.7 \text{ mm}$

5.7 Poisson Oranı (Poisson's Ratio):

Eğer bir cisim eksenel bir yükle maruz ise cisim eksenel yönde uzayacak ve yanal yönde oluşacaktır (kısalacaktır). Eğer eksenel yönde basma kuvvetine maruz kalırsa eksenel yönde kısalacak ve yanal yönde uzayacaktır.



Çekme çubuğu



Basma çubuğu

Sonuç olarak çubuğun boyunca Δ bir değişme çubuğun yarıçapında δ bir değişim vardır.

Fransız bilim adamı S.D. Poisson bu iki değişim birbirinden bağımsız olmaması gerektiğini düşündü,

Eksenel Strain $= \varepsilon_{boyuna} = \frac{\Delta}{L}$

Yanal strain $= \varepsilon_{yanal} = \frac{\delta}{r}$

izotropik ve homojen malzeme için:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yanal}}{\varepsilon_{boyuna}}$$

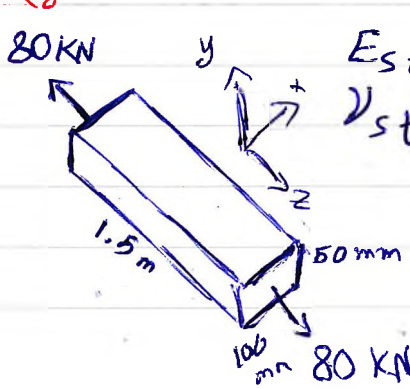
ν = Poisson oranı

(-) işareti sonucu artı yapmak için konmuştur.

mühendislikte kullanılan çoğu malzeme için $\nu = 0.25 \div 0.35$

$0 < \nu \leq 0.5$ $\quad \nu_{çelik} = 0.27 ; 0.3$ $\quad \nu_{Al} = 0.35$

Örnek:



$E_{st} = 200$ GPa

$\nu_{st} = 0.3$

Çubuğun boyutundaki ve kesitindeki meydana gelen değişmeyi bulunuz.

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{80 \times 10^3}{0.1 \times 0.05} = 1.6 \times 10^6 \text{ Pa} = 16 \text{ MPa}$$

Hook kanunu

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Eksenel uzama

$$\Delta L_z = L \cdot \varepsilon = 80 \times 10^{-6} \times 1.5 = 120 \ \mu m$$

$$\varepsilon_{boyuna} = \frac{16 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 80 \times 10^{-6} \ \frac{mm}{mm}$$

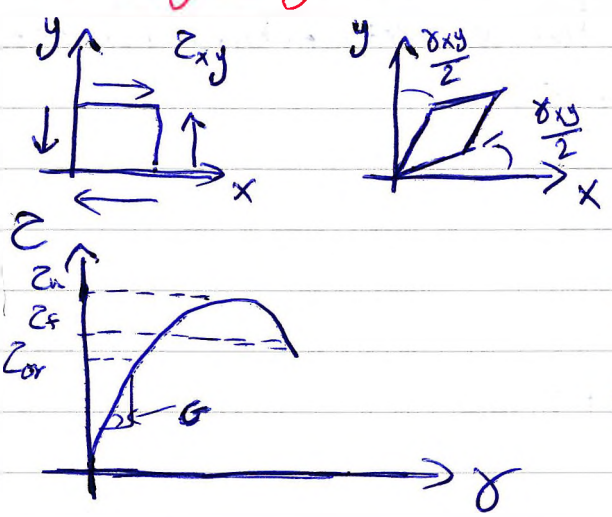
$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yanal}}{\varepsilon_{boyuna}} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_z}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z = -0.3 \times (80 \times 10^{-6}) = -24 \times 10^{-6} \ \frac{m}{m} = -2.4 \ \frac{N m}{m}$$

$$\Delta L_x = -\varepsilon_x \cdot L_x = -(24 \times 10^{-6})(0.1) = -2.4 \ \mu m$$

$$\Delta L_y = -\varepsilon_y \cdot L_y = -(24 \times 10^{-6})(0.05) = -1.2 \ \mu m$$

5.8 Kayma gerilmesi - STRAIN Diyagramı



Basit Kayma gerilmesine maruz malzemelerde testi, ince tüplerle burulma zorlama yapılarak bulunur.

$$\tau = G \cdot \gamma$$

τ: Kayma gerilmesi, γ: Kayma şekil değiştirmesi

G = Kayma modülü

Bazı malzemeler için Kayma Modülü G,

Alüminyum: 27 GPa Çelik: 75 GPa

Dökme Demir: 27 GPa

Homojen/izotropik Lineer elastik bir malzeme için

E, ν, G olmak üzere İki adet malzeme sabiti vardır

E: Elastisite modülü ν: Poisson Oranı G: Kayma modülü

Ancak bu üç malzeme sbti arasında

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

bir ilişki vardır. Sonuç olarak bağımsız malzeme sabiti 2 dir.

Özet olarak:

Normal Gerilme $\sigma = E.\varepsilon$

Kayma Gerilmesi $\tau = G.\gamma$

E: Elastik modülü [Pa]

G: Kayma modülü [Pa]

ε: Normal strain $\left[\frac{mm}{mm}\right]$

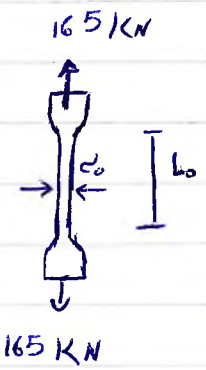
γ: Kayma strainı [Rad]

Poisson oranı $= \nu = -\frac{\varepsilon_{yanal}}{\varepsilon_{boyuna}}$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

	E	G	ν
Alüminyum	73.1	26	0.75
Dökme demir	17.2	66	0.25
Çelik Alaşım	200	78	0.32

Örnek:



Şekildeki numunenin çapı $d_o = 25$ mm boyu $L_o = 250$ mm uygulanan kuvvet 165 kN ve L_o boyu 1.20 mm uzamıştır.

[$\sigma_{AL} = 26$ GPa, $\sigma_y = \sigma_{AK} = 440$ mPa]

a) Elastisite modülünü hesaplayınız.

b) yanal yönde oluşan büyütmeyi (çaptaki azalmayı) bulunuz.

a) $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{165 \times 10^3}{\frac{\pi}{4} \times (0.025)^2} = 336.1$ mPa < 440 mPa

$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1.2\,mm}{250\,mm} = 0.0048 \ \frac{mm}{mm}$

$E_{AL} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{336.1 \times 10^6}{0.0048} \cong \boxed{70\ GPa}$

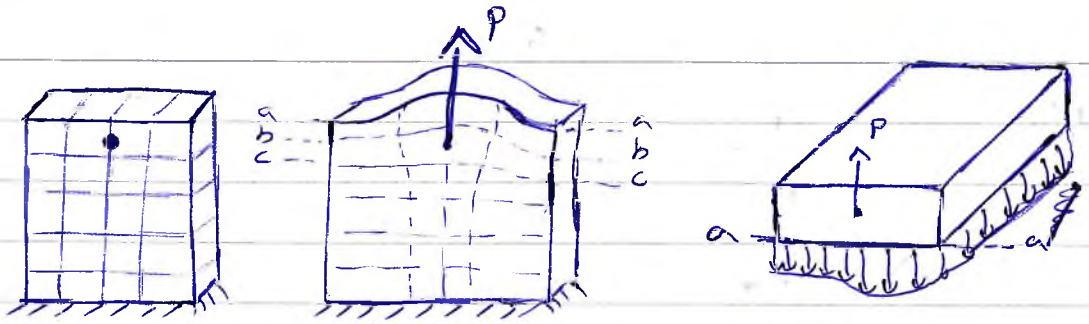
b) $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\quad 26\,GPa = \frac{70}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = 0.346$

$\nu = -\frac{\varepsilon_{yanal}}{\varepsilon_{boyuna}} = -\frac{\varepsilon_{yan}}{0.0048} = 0.346 \Rightarrow \varepsilon_{yanal} = -0.00166 \ \frac{mm}{mm}$

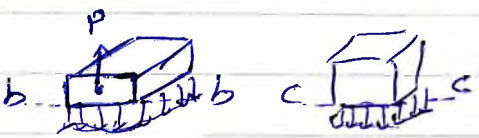
$\Delta d = \varepsilon_{yanal} \cdot d_o = -0.00166 \times 25 = \boxed{-0.0415\ mm}$

CHPT-6 Eksenel Yük (Axial load)

6.1 SAINT-VENANT ilkesi:



Deformasyondan önce Defden Sonra



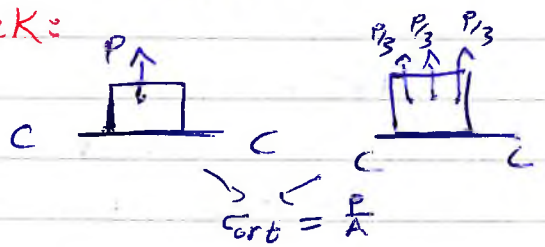
$\sigma_c = \sigma_{ort} = \frac{P}{A}$

cc kesiti en az kesitin büyük boyut kadar mesafede olmalıdır.

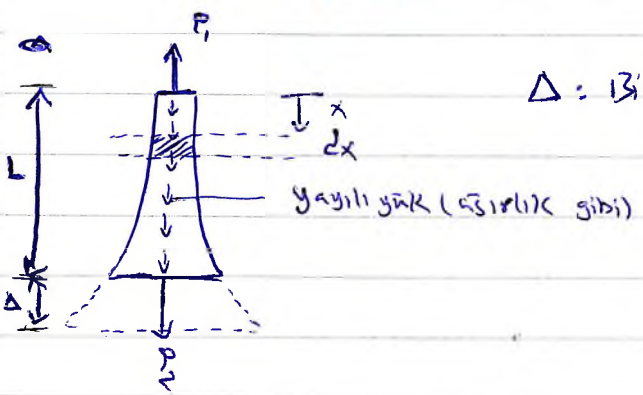
Saint-Venant prensibi:

Bir cisimde uygulanan kuvvetten yeterince uzakta olan noktalarda oluşan gerilme ve strainlerin değeri; eğer bu kuvvetin yerine aynı bölgeye statik olarak eşiti olan başka kuvvetler uygulanırsa, değişmez.

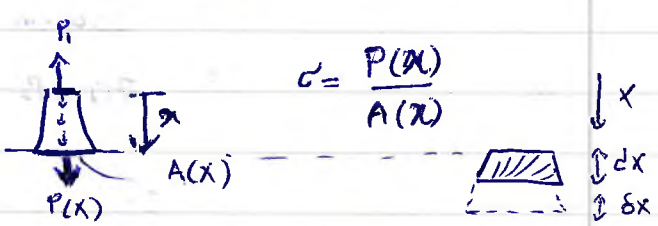
Örnek:



6.2 Eksenel yüklü çubuklarda deformasyon:



Δ: Bir uçun diğer uca göre yer değişimi



$\varepsilon = \frac{\delta x}{dx}$

Hooke kanunu:

$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \frac{P(x)}{A(x)} = E \cdot \frac{\delta x}{dx} \qquad \boxed{\delta x = \frac{P(x)}{A(x)} \frac{dx}{E}}$

Bütün çubuk için uzama:

$$\boxed{\Delta = \int_0^L \frac{P(x)}{A(x)} \frac{dx}{E}}$$

Δ: Çubuktaki uzama (özeli yer değiştirme)

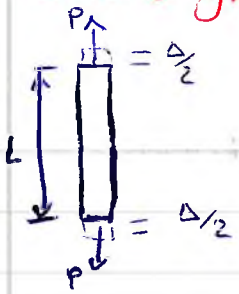
L: Çubuğun uzunluğu

P(x): bileşke iç kuvvet

A(x): kesit alanı

E: Elastisite modülü

Sabit yük ve kesit alanı durumu:



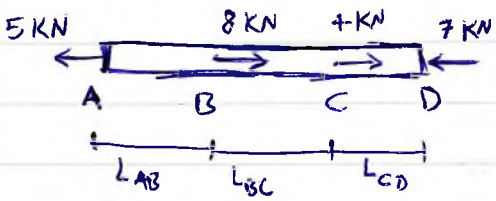
$$\Delta = \frac{P.L}{A.E}$$

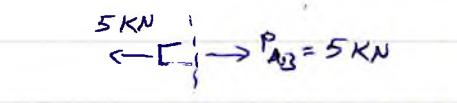
Eğer çubuk, farklı malzemelerden oluşuyorsa, farklı kesiti vs. toplam uzama

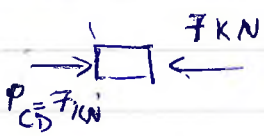
$$\Delta = \sum \frac{P.L}{AE}$$

Eğer iç kuvvetler P(x) çekmeye çalışıyorsa Pozitif uzama pozitif
basmaya ~ negatif. kısalma negatif

Örnek:







İç kuvvetler (işaret anlaşmamıza göre)

$P_{AB} = 5$ KN $P_{CD} = -7$ KN

$P_{BC} = -3$ KN

$$\Delta_{A/D} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{A E_i} = \frac{5.L_{AB}}{A.E} + \frac{(-3)L_{BC}}{A.E} + \frac{(-7)L_{CD}}{A.E}$$

A'nın D'ye göre yer değişimi

$$= \frac{1}{AE}\left[5L_{AB} - 3L_{BC} - 7L_{CD}\right]$$

eğer sonuç pozitif ise A D'den uzaklaşıyor demektir.

6.3 Süper pozisyon ilkesi:

① yükler (kuvvetler, mesnetler) ile gerilmeler arasındaki ilişki lineer olmalıdır. yani:

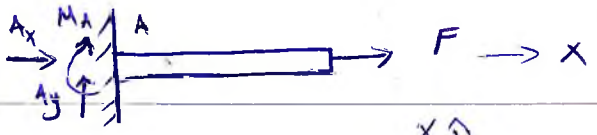
$$\sigma \overset{\text{Lineer}}{\hookrightarrow} = \frac{P}{A} \quad \text{ve} \quad \Delta \overset{\text{Lineer}}{\hookrightarrow} = \frac{P.L}{A.E}$$

② Yükler cismin şeklini çok değiştirmiş olmamalıdır.



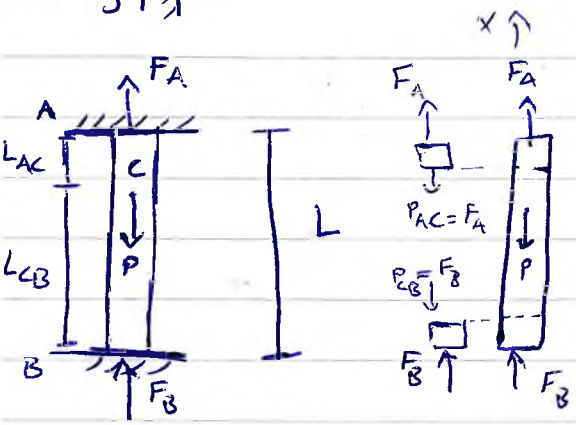
I hate ... you

6.4 Statikçe belirsiz eksenel yüklü cubuklar:



$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = -F$

statikçe belirsiz sistem.



1. Metod:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_B + F_A - P = 0$ (Denge Denklemi) (1)

Burada F_B ve F_A iki bilinmeyen var.

Ancak tek denge denklemi var.

Bu durumda statikçe belirsiz sistem denir.

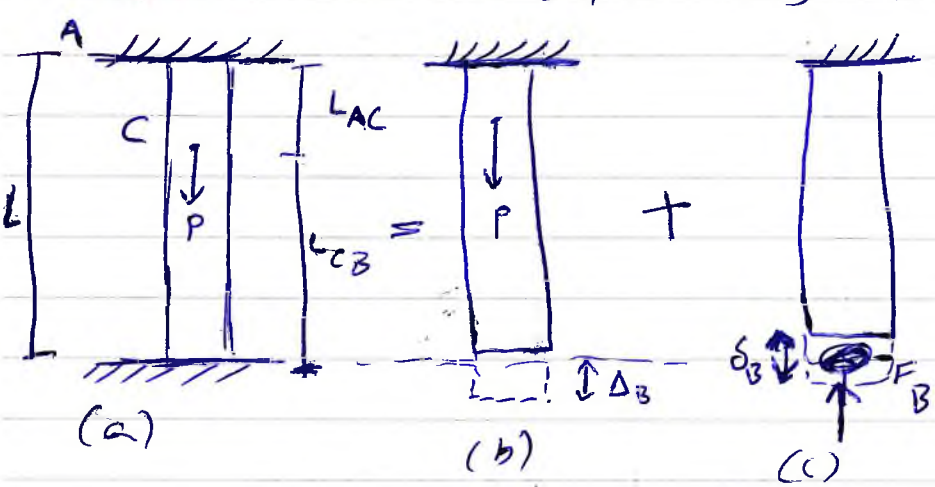
Bu yüzden biz ikinci bir denklem ihtiyaç duyarız. Bu ikinci denklem deformasyondan bulunabilir. Bunlara biz "uygunluk şartı" (Compatibility Condition) diyeceğiz.

$\Delta_{A/B} = 0$ (uygunluk denklemi)

$\Delta_{AB} = \frac{F_A \cdot L_{AC}}{A \cdot E} - \frac{F_B \cdot L_{CB}}{AE} = 0$ (2) eğer AE sabitse

$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right)$, $F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$ (1) ve (2) den yazılır.

2. Metod: Kuvvetlerin süperpozisyon metodu.



Uygunluk denklemini yazmak için önce bu mesnetlerden birisini, geçici olarak kaldıracağız. Bu kalkan mesnet "rezunzant" diyeceğiz. Ancak bir mesnetin "rezunzant" olabilmesi için mesnet kalktığında tahi denge durumunda kalabilmeli. Burada B mesnetini "rezunzant" seçtik.

F_B'de rezunzant kuvvet olacak

(b+c)'den $F_A = P - F_B$ bulunur. (Denge Denklemi)

P kuvveti aşağıya doğru Δ_B (B noktasını) yer değiştirir,

F_B ise yukarı doğru $\delta_B(F_B)$ "

$\Rightarrow$ $\Delta_B = \delta_B$ olmalı $\quad 0 = \frac{P \cdot L_{AC}}{A \cdot E} - \frac{F_B \cdot L}{A \cdot E}$ (2)

$F_B = P \frac{L_{AC}}{L}$ (2)'den $F_A = P \frac{L_{CB}}{L}$

6.5 THERMAL (ISIL) Gerilmeler: (thermal stresses)

Homojen ve isotropik malzemeler için:

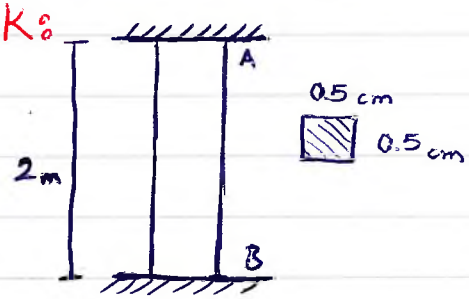
$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = \varepsilon_{Termal} \cdot L \qquad \varepsilon_{Termal} = \alpha \cdot \Delta T$$

α: Isıl genleşme katsayısı ($\frac{1}{°C}, \frac{1}{°F}, \frac{1}{°K}, \dots$)

ΔT: Sıcaklık artışı

ε: Birim uzunluğa düşen uzama

Örnek:

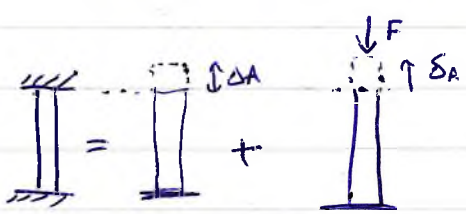


AB çubuğunun sıcaklığı $T_1 = 60°$'den $T_2 = 120°$'ye çıkarılırsa meydana gelecek olan normal gerilmeyi hesaplayınız.

($E_{st} = 200\ GPa$, $\alpha_{st} = 6.5 \times 10^{-6} \frac{1}{°C}$)



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A = F_B = F$



$\Delta_A - \delta_A = 0$ (uygunluk şartı) $\Rightarrow \Delta_A = \delta_A$

$\alpha \cdot \Delta T \cdot L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} \Rightarrow F = \alpha \cdot \Delta T \cdot A \cdot E = \dots$

gerilim: $\sigma = \frac{F}{A} = \alpha \cdot \Delta T \cdot E = \varepsilon_{ısı} \cdot E = \dots$

$F = 6.5 \times 10^{-6} \times 60 \times (0.5)^2 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^9$

6.6 Gerilme Yığılmaları (Stress Concentrations):



Kuvvet uygulmadan önce



" " sonra



Delik etkisi gözönüne alınan gerçek gerilme etkisi

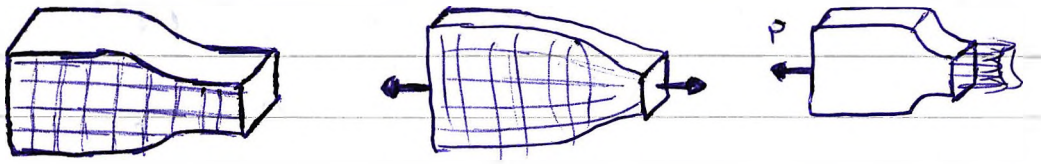


Delik etkisi gözönüne alınmadan bulunan gerilim

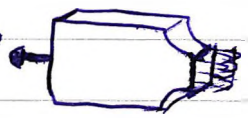
$$P = \int \sigma \, dA$$

Kesit Değişimi Durumu:

Yük uygulamadan önce — yük uygulandıktan sonra — gerçek gerilim değişimi



$P = \int \sigma \cdot dA$

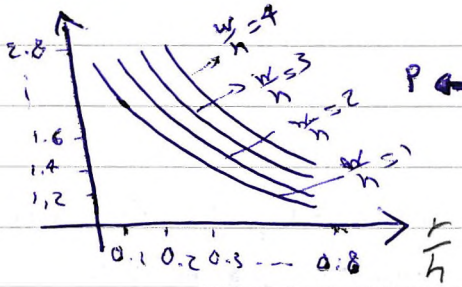


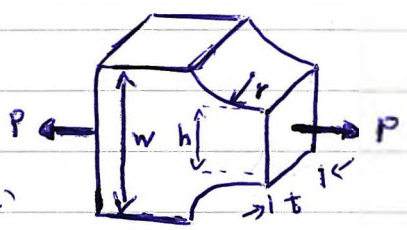
$\sigma_{ort} = \frac{P}{A}$ Kesit değişimi gözönüne alınmadan bulunan gerilim.

Pratik mühendislik ⇒ Max. gerilme

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ort}}$$ K: gerilme yiğilma faktörü

Örnek:



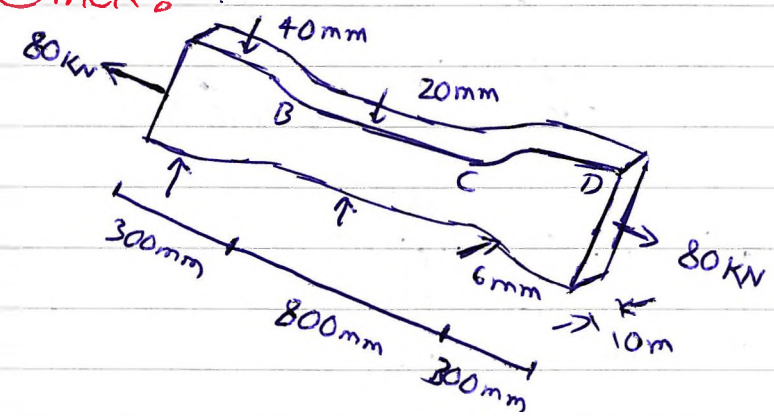


$$\sigma_{ort} = \frac{P}{t.h}$$

K grafikten okunur

$\sigma_{max} = K \sigma_{ort}$

Örnek: A



Şekildeki çubuk için Max. gerilmeyi ve iki uç arasındaki yer değiştirmeyi bulunuz.

($\sigma_{AK} = \sigma_{yield} = 700$ MPa, $E = 200$ GPa)

Max. normal gerilmelerin oluştuğu yer B ve C noktalarıdır. Şekildeki grafikten gerilme yiğilma faktörü hesaplanır.

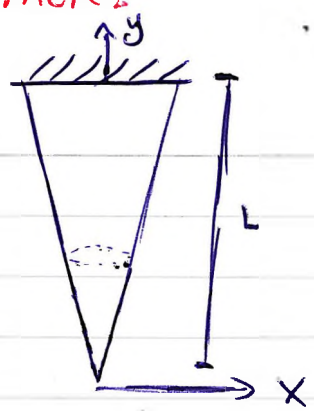
$\frac{r}{h} = \frac{6mm}{20mm} \cong 0.3 \quad \frac{w}{h} = \frac{40}{20} = 2 \Rightarrow K = 1.6$ okunmuş diyelim.

$\sigma_{max} = K . \sigma_{ort} = 1.6 \frac{80 \times 10^3}{(0.01 \times 0.02)} = 640$ MPa

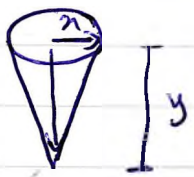
$\sigma_{max} = 640$ MPa $< \sigma_{AK} = 700$ MPa (Oluşan malzememiz elastik limitler içerisinde)

$\Delta_{A/D} = \sum \frac{P.L}{A.E} = 2 \times \left\{ \frac{80 \times 10^3 \times 0.3}{(0.04 \times 0.01)(200 \times 10^3)} \right\} + \frac{80 \times 10^3 \times 0.8}{(0.02 \times 0.01)(200 \times 10^3)} = 220$ mm

Örnek:

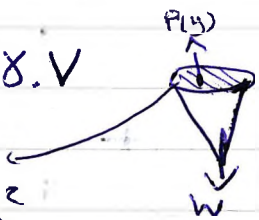


Özgül ağırlığı γ ve elastisite modülü E olan bir malzemeden Koni şeklindeki çubuk şekildeki gibi asılmıştır. yer çekimi nedeniyle Konisinin üst kısmında meydana gelen yer değiştirmeyi bulunuz.



$$\frac{x}{y} = \frac{r_0}{L} \qquad x = \frac{r_0}{L} y$$

$$V = \frac{1}{3} y \pi x^2 = \frac{1}{3} \frac{\pi r_0^2}{L^2} y^3$$



$W = \gamma . V$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow P(y) = W$

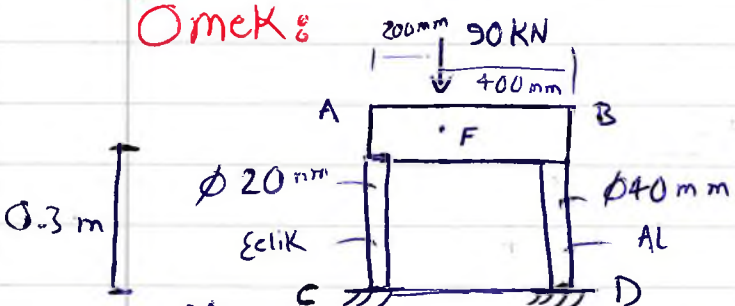
$$P(y) = \frac{\gamma \pi r_0^2}{3L^2} y^3$$

$A(y) = \pi x^2$

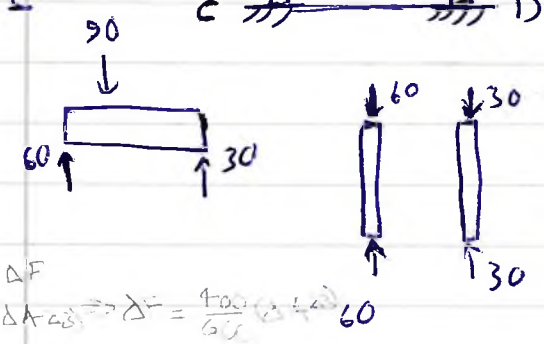
$$A(y) = \frac{\pi r_0^2}{L^2} y^2$$

$$\Delta = \int_0^L \frac{P(y)\,dy}{A(y).E} = \int_0^L \frac{\left[\frac{\gamma \pi r_0^2}{3L^2} y^3\right]}{\left[\frac{\pi r_0^2}{L^2} y^2\right].E} dy = \frac{\gamma L^2}{6E}$$

Örnek:



AB kirişi rijit AC ve BD destekleri üzerine oturmaktadır. F noktasında oluşacak olan yer değiştirmeyi bulunuz.

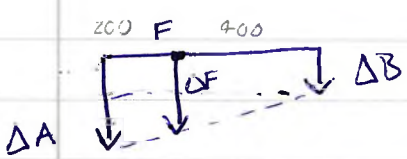


$$\Delta_A = \frac{P_{AC} \cdot L_{AC}}{A_{AC} \cdot E_{St}} = \frac{-60 \times 0.3 \times 10^3}{\pi \times 0.01^2 \times 200 \times 10^9}$$

$$= -286 \times 10^{-6}\ m$$

$$\Delta_B = \frac{P_{BD} L_{BD}}{A_{BC} \cdot E_{Al}} = \frac{(-0.3 \times 10^3)\,0.3}{(\pi \times 0.02^2)(70 \times 10^9)}$$

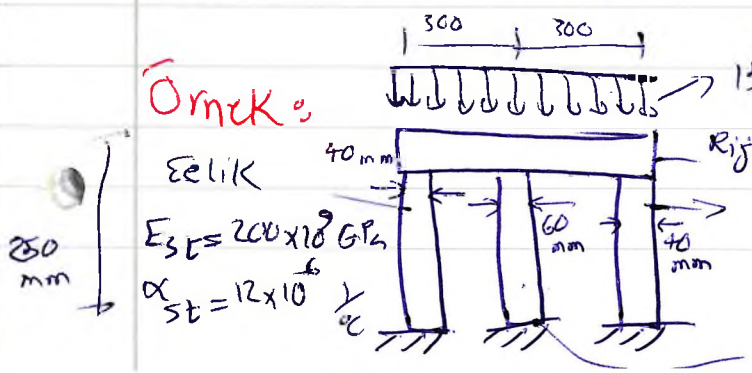
$$\Delta_B = -102 \times 10^{-6}\ m$$



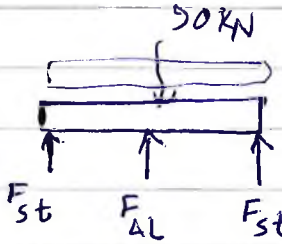
$$\Delta F = \Delta_B + (\Delta A - \Delta_B) \times$$

$$\Delta F = 0.102 + 0.184 \times \left(\frac{400}{600}\right) = 0.225\ mm$$

Örnek:

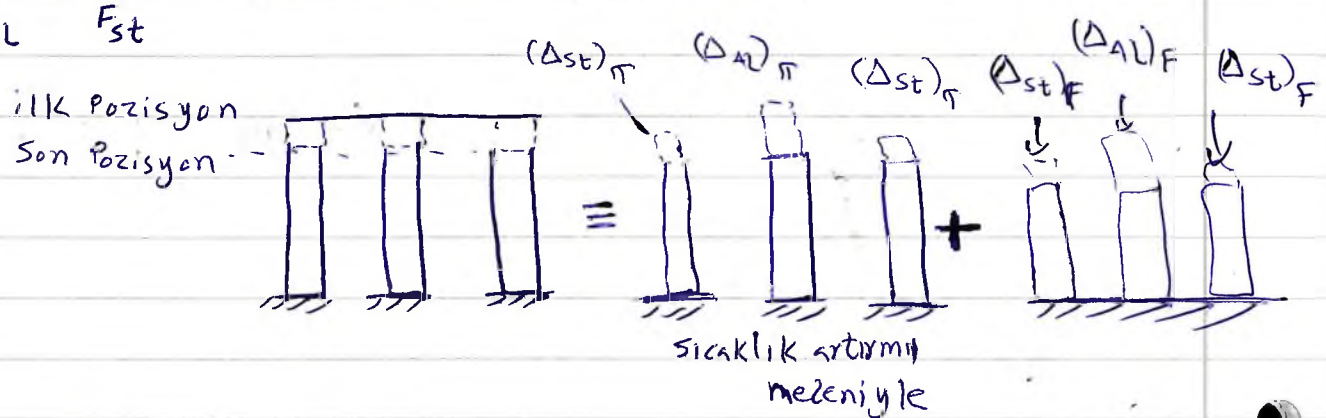


Yayılı yük yokken sıcaklık $T_1 = 20^\circ C$ dir. Sonra yayılı yük 150 $\frac{kN}{m}$ uygulanmış ve sıcaklık $T_2 = 80^\circ C$ çıkarılmıştır. Deteklerde oluşan kuvveti bulunuz.



$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 2F_{st} + F_{AL} - 90\times10^3 = 0$

$$2F_{st} + F_{AL} = 90\times10^3$$



$+\downarrow \quad \Delta_{st} = -(\Delta_{st})_T + (\Delta_{st})_F$

$+\downarrow \quad \Delta_{AL} = -(\Delta_{AL})_T + (\Delta_{AL})_F$

$\Delta_{st} = \Delta_{Al}$ (uyumluluk denklemi)

$$-(\Delta_{st})_T + (\Delta_{st})_F = -(\Delta_{AL})_T + (\Delta_{AL})_F$$

$$(-12\times10^{-6})(80^\circ C - 20^\circ C)\times 0.25\,m + \frac{F_{st} * 0.25}{\pi(0.02)^2(200\times10^9)} =$$

$$-(-23\times10^{-6})(80-20)\cdot 0.25 + \frac{F_{AL}\times 0.25}{\pi(0.03)^2(70\times10^9)}$$

$$\Rightarrow F_{st} = 1.27F_{AL} - 165.9\times10^3 \quad (1) \text{ ve } (3)\text{'den}$$

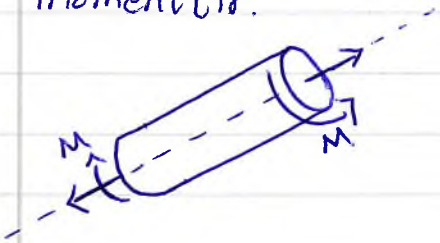
$F_{st} = -14.6\ kN$

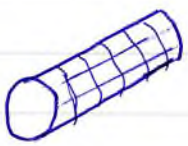
$F_{AL} = 119\ kN$

CHPT-7 Burulma (Burulma momenti = Torque) (Torsion)

7.1 Dairesel Kesitli şaftlarda burulma deformasyonu:

Tork: Eğbüğn, eğbük ekseni doğrultusunda döndürmeye çalışan momenttir.





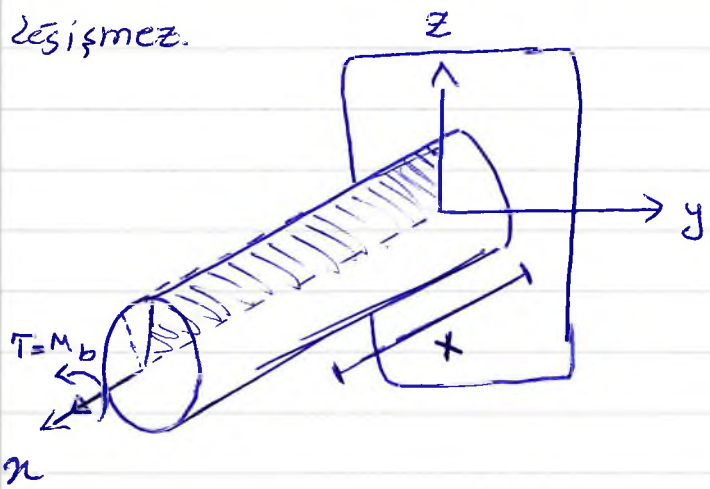
Def. den önce



Def. den Sonra

Kabuller: Eksene dik doğrultuda alınan kesitler, burulmadan sonra eksene dik olmaya devam eder.

Dönme açısı küçülürse şaftın boyu ve çapı burulmadan sonra değişmez.



$\phi(x)$: Burulma açısı (dönme açısı)





Def. den önce açı 90° Def. den sonra açı ise AC ile AD arasındaki θ' açısıdır.

$\gamma = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{C \to A \\ D \to A}} \theta'$ $\quad \Delta x \to dx$ $\quad \Delta\phi \to d\phi$

o halde: $BD = \gamma \cdot dx = \rho \cdot d\phi$

$$\gamma = \frac{\rho\, d\phi}{dx}$$

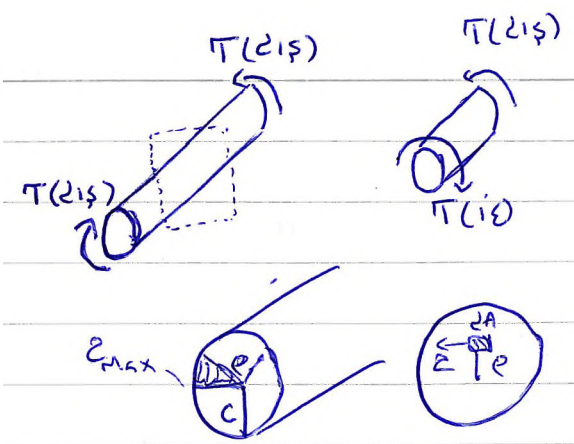


$$\frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{max}}{c}$$

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right)\gamma_{max}$$

7.2 Burulma Formülü:

Hook Kanunu: $\tau = G \cdot \gamma$



$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{max}$$

$$dF = \tau \cdot dA \qquad dT = \rho\, dF$$

$$dT = \rho\,(\tau \cdot dA)$$

$$T = \int dT = \int \rho \tau\, dA$$

$$T = \frac{\tau_{max}}{c} \int_A \rho^2 dA \Rightarrow \boxed{T = \frac{\tau_{max}}{c} J}$$

Burulma momenti

O halde:

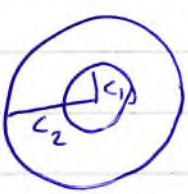
$$\boxed{\tau = \frac{T}{J}\rho}$$

Kayma gerilmesi

$$\boxed{J = \int \rho^2 dA}$$: Kutupsal atalet momenti

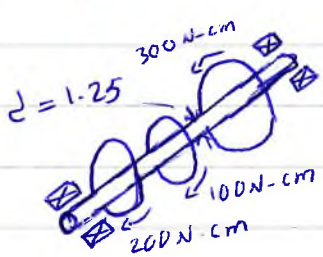


$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$



$$J = \frac{\pi}{2}\left(c_2^4 - c_1^4\right)$$

Örnek:



$T_{AB} = 200$ N-cm $\quad T_{BC} = 300$ N-cm

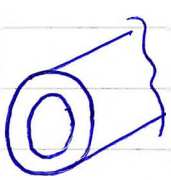
$$c = \frac{d}{2} = 0.625 \text{ cm} \qquad \tau_{max} = \frac{T_{max}\, c}{J}$$

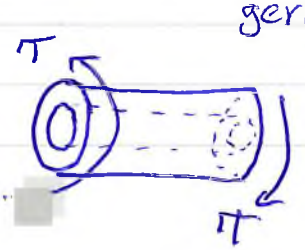
$$\tau_{max} = \frac{T_{BC}}{J} \cdot c = \frac{300}{0.239} \times 0.625 = 785 \ \frac{N}{cm^2}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = 0.239 \text{ cm}^4$$

Örnek:

Şekildeki şaftın dış çapı $d_d = 2.5$ cm iç çapı ise $d_{iç} = 2.3$ cm olan uygun bir tüp şekildeki şaft $T = 400$ N-cm değerinde bir burulma momentine maruz kalmıştır. Tüpün iç ve dış tarafındaki kayma gerilmelerini bulunuz.

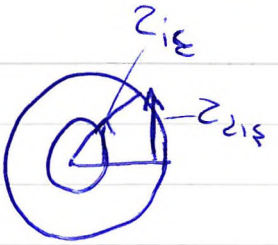




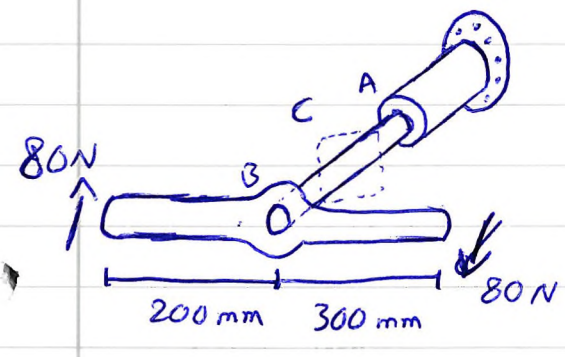
$$\tau = \frac{T}{J}\rho \qquad J = \frac{\pi}{32}\left(d_{dış}^4 - d_{iç}^4\right) = 1.088 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{J} c \qquad \tau_{max} = \tau_{dış} = \frac{T}{J} \cdot C = \frac{400}{1.088} \times 1.25 = 460\ N/cm^2$$

$$\tau_{min} = \tau_{iç} = \frac{400}{1.088} \left(\frac{2.3}{2}\right) = 423\ N/cm^2$$



Örnek:



AB borusunun iç çapı: 80 mm
dış çapı: 100 mm. Boru anahtarla 80N'luk kuvvetler uygulanarak sıkılmaktadır. Boruda meydana gelecek olan gerilmeyi bulunuz.

$$T = (80 \times 0.3) + (80 \times 0.2) = 40\ N\text{-}m$$

$$\tau_{dış} = \frac{T}{J} C_{dış} = \frac{40}{5.8 \times 10^{-6}} \times 0.05 = 0.345\ mPa$$

$$\tau_{iç} = \frac{T}{J} C_{iç} = \frac{40}{5.8 \times 10^{-6}} \times 0.04 = 0.276\ mPa$$

$$J = \frac{\pi}{2}(C_2^4 - C_1^4) = \frac{\pi}{2}(50^4 - 40^4) \times 10^{-12} \simeq 5.8 \times 10^{-06}$$

7.3 Güç iletimi:

iletilen tork ($T = M_b$)

$P = T \cdot w$ → açısal hız

Güç — Tork

SI birim Sisteminde: $P \rightarrow$ watt $\quad T \rightarrow N\text{-}m \quad w \rightarrow \frac{rad}{san}$

$f \rightarrow Hz \left(\frac{1}{s}\right)$

1 watt = 1 N-m x 1 $\frac{rad}{san}$

$w = 2\pi f$ $\qquad P = 2T\pi f$

$w = \frac{2\pi \cdot n}{60}$ ($n \rightarrow \frac{dev}{dak}$, $w \rightarrow \frac{rad}{san}$)

$T = M_b = \frac{P}{w}$

1 B.G = 75 $kg_f \cdot \frac{m}{s}$

$T = M_b = 71620 \frac{P\ [BG]}{n\ [d/dk]}$ ($M_b \rightarrow kg_f \cdot cm$)

$\tau_{max\,(cm)} = \frac{T}{J} \cdot c$

(*) $J = \frac{1}{2}\pi c^4$

$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{em}}$

$\frac{\pi}{2} c^3 = \frac{T}{\tau_{em}} = \frac{P}{w}$ $\Leftarrow$ $\frac{\frac{\pi}{2} c^4}{c} = \frac{T}{\tau_{em}}$

Örnek: Dakikada 1800 devirle dönen ve 10 BG gücü ile şaftı seçiniz. Şaft için kullanılan malzemenin emniyet kayma gerilmesi $\tau_{em} = 5600 \frac{N}{cm^2}$ olarak sınırlandırılmıştır.

$T = M_b = 71620 \frac{P\ [BG]}{N\ [d/dk]}$ $\qquad M_b = 71620 \frac{10}{1800} = 397\ kg_f \cdot cm$

$M_b = 397 \times 9.81 = 3903\ N\text{-}cm$ $\qquad \frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{em}} = \frac{3903}{5600} = 0.697\ cm^3$

$\frac{\frac{\pi}{2} c^4}{c} = 0.697 \Rightarrow c = 0.762\ cm$ $\qquad d = 2c = 1.525\ cm$

$d \cong 16$ mm olarak alınır

Örnek: 200 BG aktaracak ve kayma gerilmesi $\tau_{em} = 700\ kg/cm^2$ olan iki dolu şaftları seçiniz. Bu şaftlardan birisi 20 d/dk diğeri 20000 d/dk altında çalışmaktadır.

Düşük hızlı şaft için: $T_1 = 71620 \frac{P}{N} = 71620 \frac{200}{20} = 716200\ [kg_f \cdot cm]$

Yüksek Hızlı şaft için: $T_2 = 71620 \frac{200}{20000} = 716.200\ [kg_f \cdot cm]$

$f = m \cdot a$

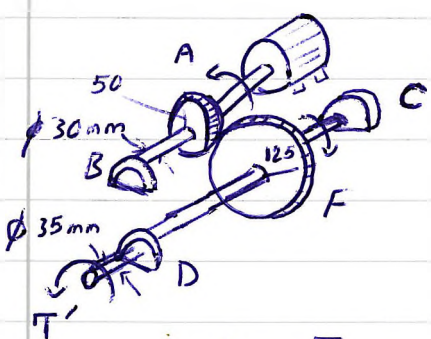
$1\ kg_f = 9.81 \frac{m}{s^2}$ $\qquad 1\ N = 1\ kg \cdot 1 \frac{m}{s^2}$

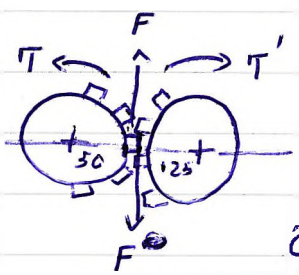
$$\frac{J_1}{c_1} = \frac{T_1}{\tau_{max}} = \frac{716200}{700} = 1023\ cm^2$$

$$J_1 = \frac{\pi c_1^4}{32} \Rightarrow c_1 = \frac{d_1}{2} \Rightarrow d_1 = 17.32\ cm$$

Benzer olarak $\Rightarrow d_2 = 1.73\ cm$

Örnek: Şekilde gösterilen elastik motoru 50 N-m'lik torku AB şaftına iletmektedir. Bu tork dişliler vasıtasıyla CD şaftına iletilmiştir. CD şaftında oluşan T' torkunu nedir. Her şaft için max. kayma gerilmesini bulunuz. (B, C ve D'de ki yataklar serbest dönmeye izin vermektedir)





$$\left.\begin{aligned} T &= 50 \cdot F \\ T' &= 125 \cdot F \end{aligned}\right\} \Rightarrow T' = 125\ N\text{-}m$$

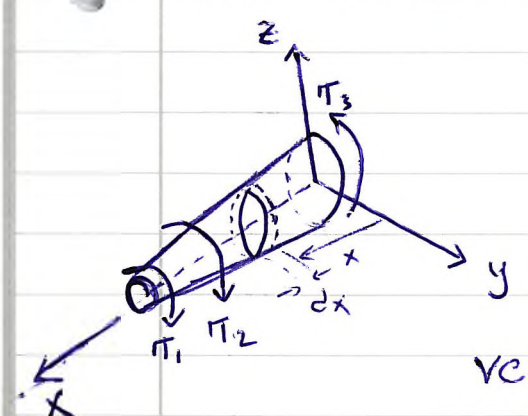
$$\tau_{AB} = \frac{T_{AB} = 50}{\frac{\pi}{32}(30\times10^{-3})^4} \cdot \frac{(30\times10^{-3})}{2}$$

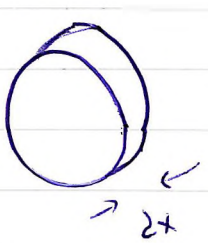
$$\tau = \frac{T}{J} \cdot c$$

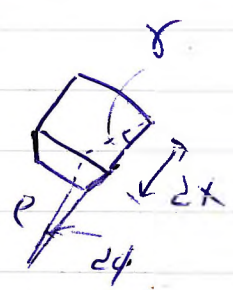
$$\tau_{AB} = 9.431\ mPa$$

$$\tau_{CD} = \frac{T_{CD} = 125}{\frac{\pi}{32}(35\times10^{-3})^4} \times \left(\frac{35}{2}\times10^{-3}\right) = 14.848\ mPa$$

7.4 Burulma açısı: ϕ (Dönme açısı, angle of twist)







$$\rho\, d\phi = \gamma\, dx$$

Hook kanunu:

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

ve $\tau = \frac{T(x)}{J(x)}\rho$ $\quad d\phi = \frac{T(x)}{J(x)}\rho\frac{1}{G}\frac{dx}{\rho}$

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G}dx$$

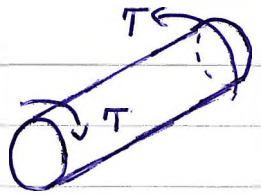
$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x).G}\,dx$$

G: Kayma modülü

T(x): x kesitinde tork

ϕ: şaftın bir ucunun diğer bir ucuna göre dönmesi [rad]

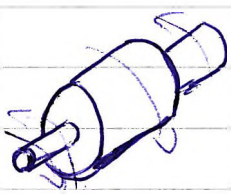
Sabit Kesitli ve Sabit tork için



$$\phi = \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$$

Kesitleri değişik olan şaftlar için veya kesitlerine farklı torklar uygulanırsa veya farklı malzemelerden yapıldılarsa

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$



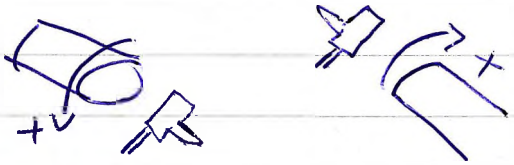
Çubuklar için

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{A_i \cdot E_i}$$

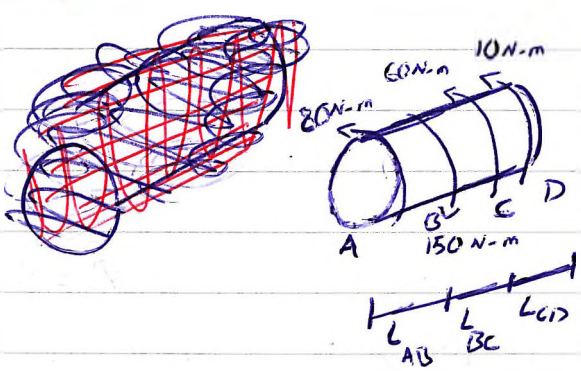
İşaret anlaşması:

Tork ve Uzama pozitif olacaktır.

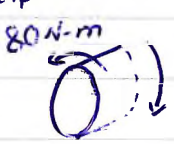
Eğer sağ el kuralı kullanılır ve baş parmağın yönü kesitten uzaklaşır yönde olursa



Örnek:

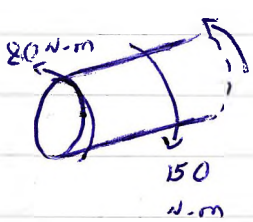


dış moment



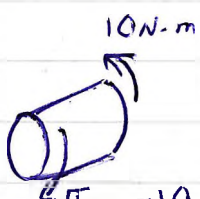
(iç moment)

$T_{AB} = 80$



(iç moment)

$T_{BC} = 70$ N m



$T_{CD} = 10$ N m (iç kuvvet)

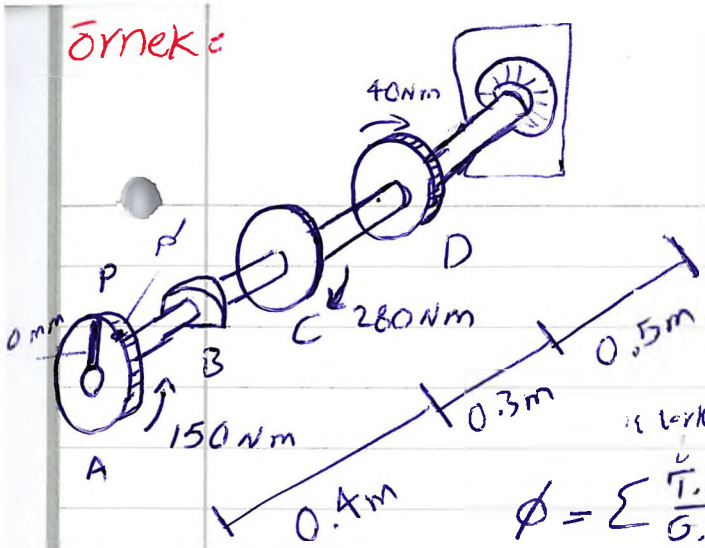
İşaret Anlaşmasına göre:

$T_{AB} = 80$ Nm $\quad T_{BC} = -70$ N.m $\quad T_{CD} = -10$ Nm

$$\phi_{A/D} = \sum \frac{T_i L_i}{J_i G_i} = \frac{80 \times L_{AB}}{J \cdot G} + \frac{(-70) L_{BC}}{J \cdot G} + \frac{(-10) L_{CD}}{J \cdot G}$$

Örnek:

Örnek:



Şaftın malzemesi $G = 80\ GPa$

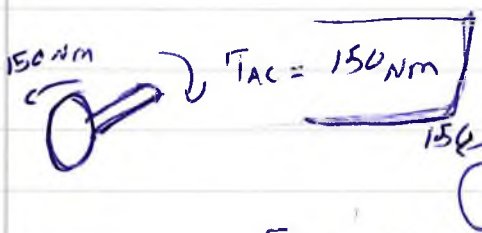
Şaftın çapı: $\phi d = 14\ mm$ A dişlisindeki P noktasının yer değiştirmesini bulunuz

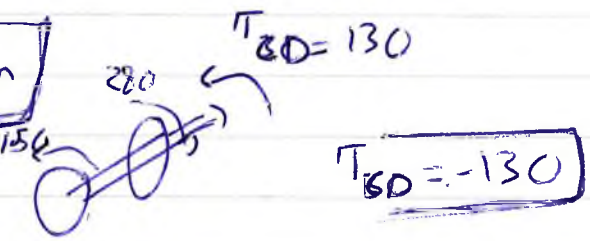
Şaft B'deki yataktа serbestçe iç torklar dönebilmektedir.

$$\phi = \sum \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

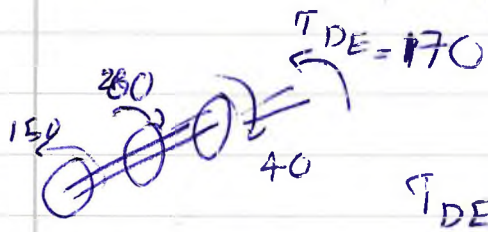
ohalde iç torkları hesaplamak gerekiyor.







$T_{BD} = -130$



$T_{DE} = -170$

$$J = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} (14 \times 10^{-3})^4$$

$$J = 3.77 \times 10^{-9}\ m^4$$

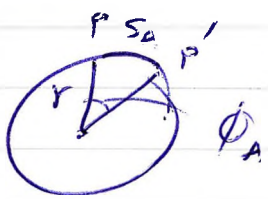
$$\phi_{A/E} = \phi_A = \frac{1}{3.77 \times 10^{-9} \times [80 \times 10^9]} \cdot [150 \times 0.4 + (-130)(0.3) + (-170)(0.5)]$$

E noktası sabit

$$\phi_A = -0.212\ rad$$

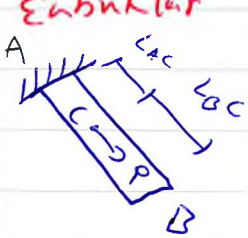
$$\overline{PP'} = S_A = \phi_A \cdot r_A = 0.212 \times 100 = 21.2\ mm$$

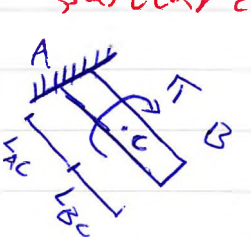
A dişkinin yarıçapı



7.5 STATİK olarak belirsiz tork yüklü şaftlar:

Eşdeğer şaftlarda





1. Metod: Eşdeğerlerde 1. Denklem (Denge denklemi)

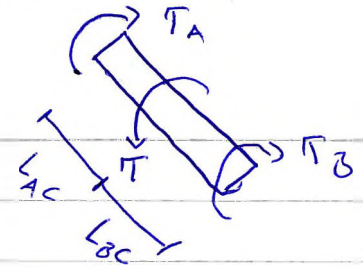


$$F_A + F_B - P = 0$$

2. Uygunluk koşulu

$$\Delta_{A/B} = 0$$

Şaftlarda

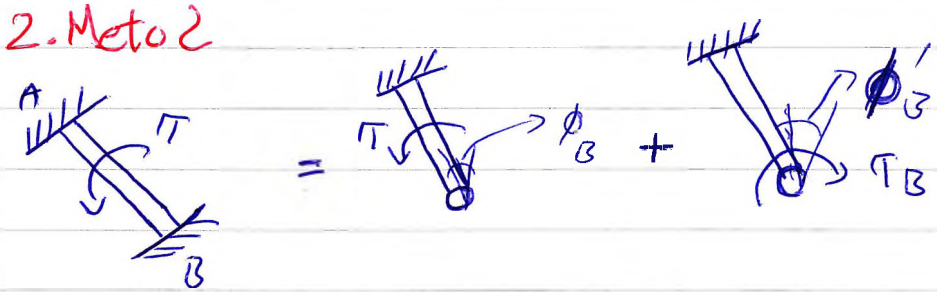


1. Denge denklemi $T_A + T_B - T = 0$

2. Uygunluk denklemi $\phi_{A/B} = 0$

$$\frac{T_A \cdot L_{AC}}{J \cdot G} - \frac{T_B \cdot L_{BC}}{J \cdot G} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_A = T\left(\frac{L_{BC}}{L}\right) \\ T_B = T\left(\frac{L_{AC}}{L}\right) \end{cases}$$

2. Metod

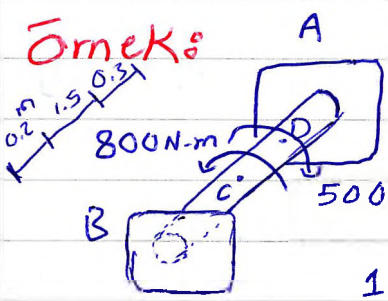


1) Denge denklemi: $T - T_A - T_B = 0$

2) Uygunluk şartı: $\phi_B - \phi'_B = 0$

$$\frac{T_A L_{AC}}{J \cdot G} - \frac{T_B \cdot L}{J \cdot G} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T_A = T\left(\frac{L_{BC}}{L}\right) \\ T_B = T\left(\frac{L_{AC}}{L}\right) \end{cases}$$

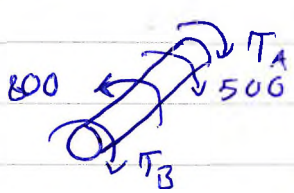
Örnek:



Şekildeki şaft 20 mm çapındadır. A ve B mesnetlerinde meydana gelecek olan torkları (reaksiyonları) bulunuz.

1. Metod denge denklemi:

$$T_A + T_B + 500 - 800 = 0 \quad (1)$$



$\phi_{A/B} = 0$

BC bölümü:



$T_B = T_{BC}$

CD bölümü:



DA Bölümü:



$T_A = T_{AD}$

$$\phi = \sum \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

$$-\frac{T_B(0.2)}{J \cdot G} + \frac{(T_A + 500)(1.5)}{J \cdot G} + \frac{T_A(0.3)}{J \cdot G} = 0$$

$$18\,T_A - 0.2\,T_B = -750 \quad (2)$$

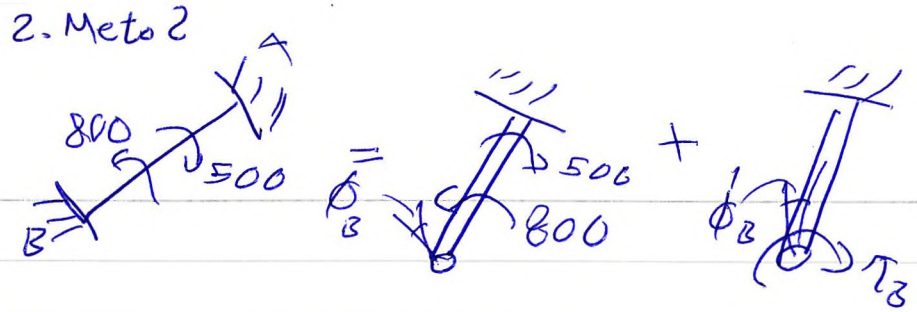
(1) ve (2)'den

$T_A = -345$ N.m

$T_B = -145$ N.m

iran@elfarconsulting.c
1234567

2. Metod



Denge denklemi : $T_A + T_B + 500 - 800 = 0$ (1)

$\phi_B - \phi'_B = 0$

$\phi_B = 0 + \frac{800 \times 1.5}{J.G} + \frac{800 \times 0.3}{J.G} = \frac{1290}{J.G}$

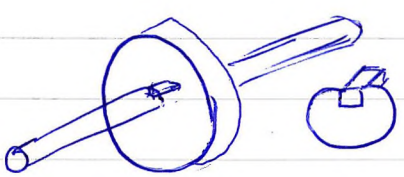
$\phi'_B = \frac{-T_B \cdot 2}{J.G}$

$T_B = 645$ N.m

$T_A = -345$ N.m

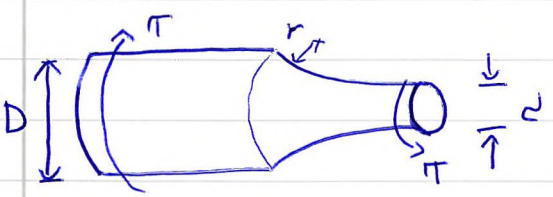
7.6 Gerilme yığılması :

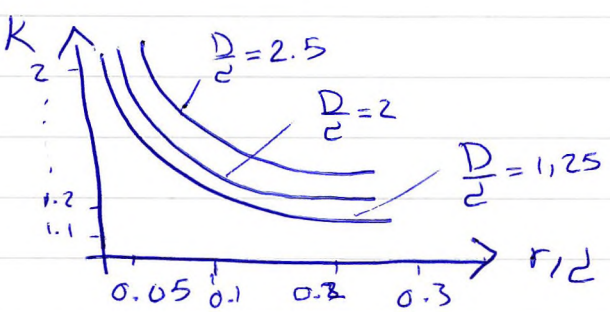
$\tau_{max} = \frac{T}{J} c$



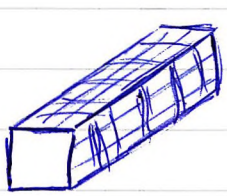
$\tau_{max} = K \cdot \frac{T}{J} \cdot c$

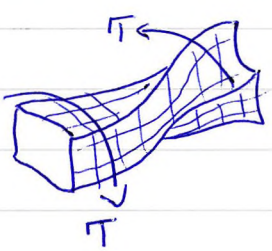
Örnek :





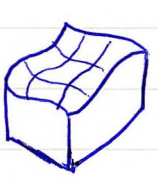
7.7 Dairesel Kesitli olmayan şaftlar





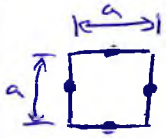


Kayma gerilmelerin değişimi



Kesitlerdeki çıkıntı olayı





Kare Kesit

$\tau_{max} = \frac{4,81 \times T}{a^3}$

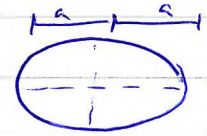
$\phi = \frac{7,10\ T.L}{a^4 G}$

Bütün bu şekiller için şaft merkezine en yakın olan yerlerde Max kayma gerilmesi bulunmuştur



$\tau = \frac{20 \cdot T}{a^3}$

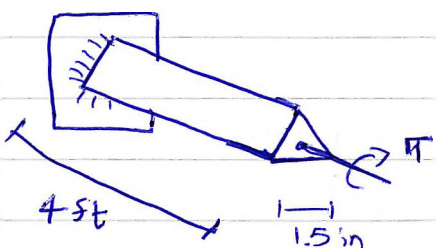
$\phi = \frac{46 \cdot T.L}{a^4 G}$



$\tau = \frac{2 \cdot T}{\pi a b^2}$

$\phi = \frac{(a^2+b^2)\ T.L}{\pi a^3 b^3 G}$

Örnek: Al'dan yapılan şaft eşkenar üçgen kesite sahiptir.



Kullanılan malzeme için $\tau_{em} = 8$ ksi $(8\ \frac{klbs}{in^2})$

$\phi_{em} = 0.02$ rad

$$\tau_{em} = \frac{20 \cdot T}{a^3} \qquad 80 \times 10^3 \frac{lb}{in^2} = \frac{20\ T}{(1.5\ in)^3}$$

$$T = 1350\ lb\text{-}in$$

ve;

$$\phi_{em} = \frac{46 \cdot T \cdot L}{a^4 \cdot G} \Rightarrow 0.02 = \frac{46 \cdot T\ (4\ ft \times 12\ \frac{in}{ft})}{(4.5)^4 [3.7 \times 10^6]} \qquad T = 170\ lb\text{-}in$$

Dairesel kesitli olma durumu:

$A_{daire} = A_{üçgen}$

$\pi c^2 = \frac{1}{2} 1.5 \times 1.5 \times \sin 60$

$c = 0.557\ in$

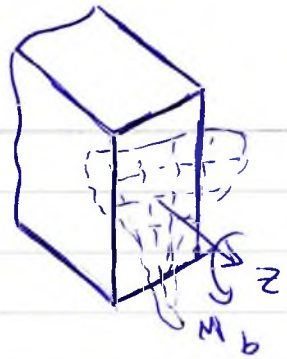
$$\tau_{em} = \frac{T}{J} c \Rightarrow 8 \times 10^3 = \frac{T \cdot 0.557}{\frac{\pi}{2} 0.557^4}$$

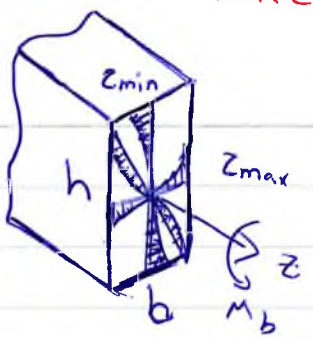
$$\Rightarrow T = 2170\ lb\text{-}in$$

$$\phi_{em} = \frac{T \cdot L}{J \cdot G} \Rightarrow 0.02 = \frac{T \cdot 4.12}{\frac{\pi}{2} 0.557^4 \times 37 \times 10^6} \Rightarrow T = 233\ lb\text{-}in$$

PROFİL KESİTLER:

Dikdörtgen Kesitler:





En büyük Kayma gerilmesi uzun kenarın orta kısmında oluşmaktadır.

$h > b$

En büyük Kayma gerilmesi: $\tau_{Max} = \dfrac{M_b}{\xi_1 . h . b^3}\beta$ (▽)

En büyük birim uzunluk dönme (burulma) açısı: $w_z = \dfrac{M_b}{\xi_2 . G . h . b^3}$

Dikdörtgen Kesitler için $\beta = b$; ξ_1 ve ξ_2 tablodaki gibidir.

$\frac{h}{b}$	1	2	4	6	8	10	...	∞
ξ_1	0.208	0.246	0.282	0.299	0.307	0.312	...	$1/3$
ξ_2	0.141	0.229	0.281	0.299	0.307	0.312	...	$1/3$

$\frac{h}{b}$ büyüdükçe ξ_1 ve $\xi_2 \to 1/3$

İnce Dikdörtgen Kesitler için (yani $\frac{h}{b}\uparrow$)

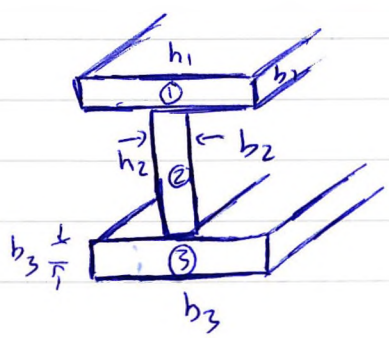
$$\tau_{Max} = \frac{M_b}{\frac{1}{3}hb^3}\beta = \frac{M_b}{I_b}b$$

$$w_z = \frac{M_b}{G\frac{1}{3}hb^3} = \frac{M_b}{GI_b}$$

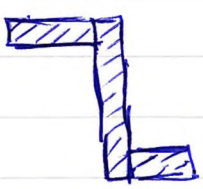
$$\Rightarrow \tau_{Max} = G . b . w_z \quad (\star)$$

Burada $I_b = \frac{1}{3}hb^3$

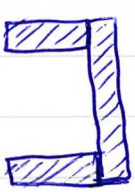
Profil Kesitler:



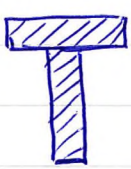
(n = 3)



(n = 3)



(n = 3)



(n = 2)

$$GI_b = \lambda \cdot G \cdot \left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i b_i^3\right) \qquad (***)$$

Burada $\lambda \geq 1$, Profile göre değişen bir çarpan.

Profil	O	L	C	T	⌐L	I
λ	1	1	1.12	1.15	1.17	1.25 ÷ 1.30

(*) denklemine en büyük kayma gerilme (τ_{max}) en kalın dikdörtgenin uzun kenarının ortasında olacaktır. O halde (*) denklemine ve (***) denklemine $b_{max} = M_{max}(b_1, b_2, \ldots b_n)$ yerleştiricek, profil kesitte oluşan en büyük kayma gerilmesi ve bunktaki birim dönme (burulma) açısı:

$$\tau_{max} = \frac{M_b \cdot b_{max}}{\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3} h_i b_i^3\right)} \Rightarrow (\tau_{max})_i = G b_i w_z$$

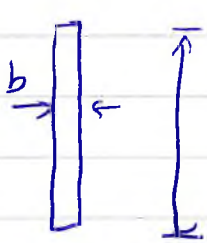
$$w_z = \frac{M_b}{\lambda G \sum \left(\frac{1}{3} h_i b_i^3\right)}$$

Açık halka bir dikdörtgen gibi düşünülmelidir.



$b = t$

$h = 2\pi R_0$

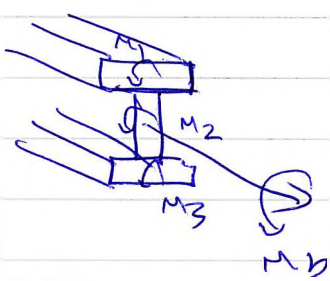


Bileşik profiller: Eğer profili oluşturan dikdörtgenler farklı malzemelerden yapılıyorsa $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$

Her bir dikdörtgen kesit kendi payına $M_1, M_2, \ldots, M_n$ burulma momentlerini taşıyacağına göre burulma denge denkleminden:

$$M_b = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$$

burada $M_1, M_2, \ldots, M_n$ problemin bilinmeyenleri



Denklemin uygunluk koşulu ise tüm profil için birim dönme açısı w_z sabit kalacaktır.

Yani $w_z = w_1 = w_2 = \cdots = w_n$ (a)

böylece $W_i = \dfrac{M_i}{\frac{1}{3} G_i h_i b_i^3}$ $(i=1,2,\dots n)$ (b)

eğer $M_1, M_2, \dots, M_n$ değerlerini eğer $M_b = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ denklemine yerine koyarsak (c)

$$W_z = \frac{M_b}{\sum_{i=1}^{n} G_i \left(\frac{1}{3} h_i b_i^3\right)} \quad (2)$$

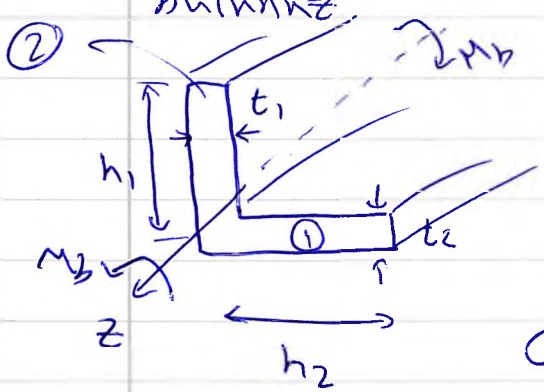
(a), (b), (c) yardımıyla $M_1, M_2, \dots, M_n$ değerleri bulunur.
(2) yardımıyla ise W_z değeri bulunur.
Bileşik profili oluşturan her bir dikdörtgen de oluşacak en büyük kayma gerilmesi (Δ) denklemiyle bulunur.

$$(\tau_{max})_j = G_j b_j W_z$$

buradan

$$(\tau_{max})_j = \frac{M_b G_j b_j}{\sum_{i=1}^{n} G_i \left(\frac{1}{3} h_i b_i^3\right)} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Örnek: Şekildeki L Profil iki farklı malzemeden yapılmış bir bileşik çubuktur. Aşağıdaki tablodaki verilmiş olan malzeme özellikleri ile kesit boyutlarını kullanmak, çubuğun güvenle taşıyabileceği burulma momenti M_b bulunuz.



Malzeme;	τ_{em} (mPa)	G (mPa)	t (mm)	h (mm)
①	60	50	12	140
②	80	70	9	100

$$GI_b = \frac{1}{3}\left[G_1 h_1 t_1^3 + G_2 h_2 t_2^3\right]$$

$$GI_b = \frac{1}{3}\left[50\times10^3 \times 140 \times 12^3 + 70\times10^3 \times 100 \times 9^3\right]$$

$$GI_b = 5733 \times 10^6 \ N/mm^2$$

Her bir parçada birim dönme açısı, uyuşmalık koşulu gereği

$$w_1 = w_2 = \frac{M_b}{G \cdot I_b} = 174429 \times 10^{-15} M_b$$

Malzemelerde oluşacak olan en büyük kayma gerilmeleri ile bunların sağlanması gereken güvenlik koşulları:

$$(\tau_{max})_1 = G_1 w_1 t_1 \leq (\tau_{em})_1 = 60 \text{ MPa}$$
$$(\tau_{max})_2 = G_2 w_2 t_2 \leq (\tau_{em})_2 = 80 \text{ MPa} \Rightarrow$$

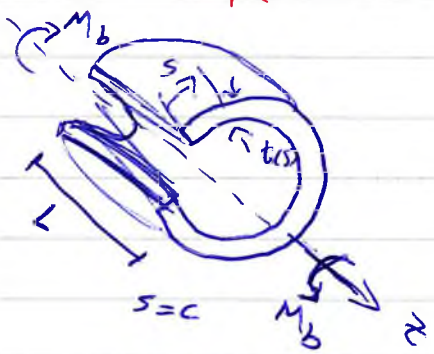
$(M_b)_1 = 577300$ N.mm

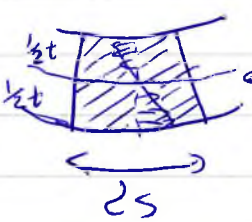
$(M_b)_2 = 728000$ N.mm

Küçük olan alınalı:

$\Rightarrow M_b = 577300$ N.mm

Açık tüplerde Burulma:





Kayma gerilmesi (açık tüpler için) ortalama eksen boyunca sıfır çıkar.

$h = 2t$

$b = t$

(∇) Zenklemide: $\tau_{max} = G \cdot b \cdot w_z$

$$w_z = \frac{M_b}{G(\frac{1}{3}hb^3)}$$ h ve b değerlerini yerleştirirsek.

$$\tau_{max} = \frac{M_b \, t_{max}}{\frac{1}{3}\int_0^c t^3 \, 2ds}$$ ve $$w_z = \frac{M_b}{G\left(\frac{1}{3}\int_0^c t^3 \, 2ds\right)}$$ bulunur

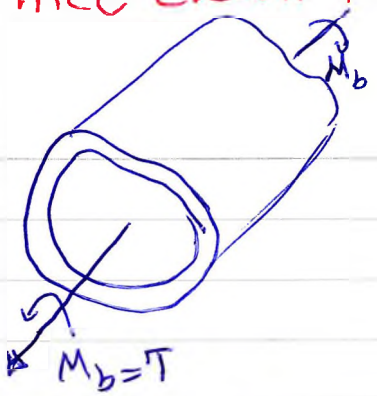
$$\tau_{max} = \frac{M_b \cdot t}{\frac{1}{3}t^3 \int_0^{2\pi R_o} 2ds} = \frac{M_b t}{\frac{1}{3}t^3 2\pi R_o}, \quad w_z = \frac{M_b}{G\frac{1}{3}t^3 2\pi R_o}$$



tam çevre

(sbt kalınlık)

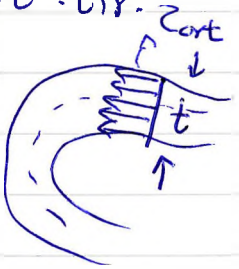
İnce cidarlı Kapalı Kesitlerde burulma:



Kayma akısı $\rightarrow q = \tau_{ort} \cdot t = sabit$

$\left.\begin{array}{l} \tau_1 \cdot t_1 = q \\ \tau_2 \cdot t_2 = q \end{array}\right\} \tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau_3 t_3 = sbt = q$

Kapalı kesitlerde herhangi bir s mesafesinde kayma gerilmeleri et kalınlığı boyunca sbt.tir.



$\tau_{ort} \cdot t = q$

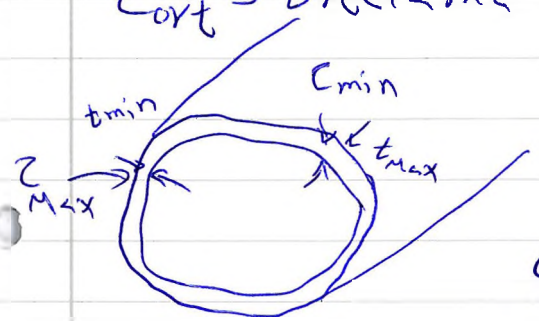
$$\tau_{ortalama} = \frac{T = M_b}{2 \cdot A_{ort} \cdot t}$$

A_{ort} = Ortalama alan (tüpün orta çizgisi içerisinde kalan alan)

t = ortalama kayma gerilmelerinin bulunduğu kalınlık

$T = M_b$ = burulma momenti

τ_{ort} = ortalama kayma gerilmesi

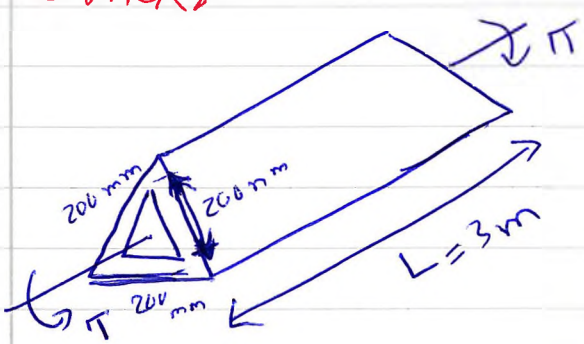


$$\tau = \frac{M_b}{2 \cdot A_{ort} \cdot t}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_b}{2 \cdot A_{ort} \cdot t_{min}} \qquad \tau_{min} = \frac{M_b}{2 \cdot A_{ort} \cdot t_{max}}$$

Dönme açısı: $\phi = \frac{T \cdot L}{4 \cdot A_{ort}^2 \cdot G} \oint \frac{ds}{t}$

Örnek:



Eğilikten yapılan şaft üçgen kesite sahiptir. Et kalınlığı 5mm dir.
$\tau_{em} = 90$ MPa, $\phi_{em} = 2 \times 10^{-3}$ rad.
Taşıyabileceği Max Torku (burulma momentini) bulunuz.



$A_{ort} = \frac{1}{2} \times 200 \times 200 \times \sin 60$

$A_{ort} = 17.32 \times 10^{-3}$ m^2

$$\tau_{ort} = \frac{T}{2.A_{ort}.t} \Rightarrow 90\times10^{6} = \frac{T}{2\times17.32\times10^{-3}\times0.005}$$

$$\Rightarrow T = 15.6\ kN\text{-}m$$

Dönme Açısı:

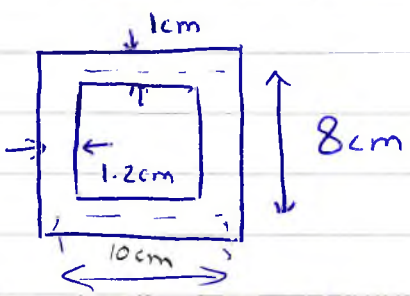
$$\phi = \frac{T.L}{4.A_{ort}^2 G}\oint\frac{ds}{t} \Rightarrow$$

$$2\times10^{-3} = \frac{T\cdot3}{4\times(17.32\times10^{-3})^2\times75\times10^{9}}\oint_{0.005}\frac{ds}{}$$

$$\Rightarrow 300 = T\oint ds \Rightarrow 300 = T\cdot3\times200\times10^{-3}$$

$$T = 500\ N\text{-}m$$

Örnek: $M = ?$



$$\tau_{b_{max}} = \frac{M_b}{2.A_{ort}.t_{min}} \leq 800$$

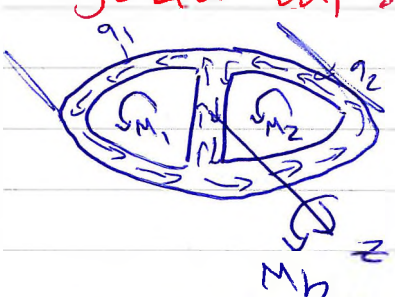
$$\frac{M_b}{2\times80\times1cm} \leq 800 \Rightarrow M_b \leq 12800\ kg_f.cm$$

$\tau_{em} = 800\ kg_f/cm^2$ olarak verilmiş

$A_{ort} = 8\times10 = 80\ cm^2$

Çok gözlü Kapalı tüpler:

2 gözlü tüp:



q_1, q_2: 1 ve 2 nolu gözdeki kayma akımları

$M_b = M_1 + M_2$ ← 2.nolu burulma momenti; → 1.nolu

$M_1 = 2.A_1.q_1$

$M_2 = 2.A_2.q_2$

$M_b = 2A_1q_1 + 2A_2q_2$ (a)

$q = 2.t = \frac{M_b}{2A_{ort}}$ ✗

Kesite etkiyen M_b momenti aerodinamikten hesaplanır: $M_b = 2qA_{ort}$

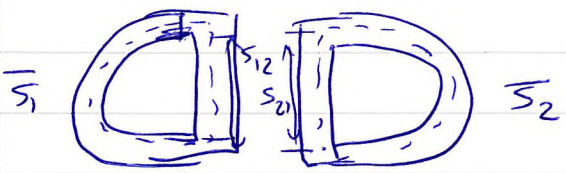
ve bilinmiyor. q_1 ve q_2 bilinmiyorlar

Bu nedenle 2 bilinmeyen Var.

2. denklem $w_1 = w_2$ (B)

$$w_i = \frac{M_i}{4GA_i^2} \oint \frac{ds}{t} = \frac{1}{2GA_i} \oint q_i \frac{ds}{t} \qquad (i=1,2,\dots)$$

(C)



1. göz : $\oint_{s_1} ds = \int_{\bar{s}_1} ds + \int_{s_{12}} ds$

2. göz : $\oint_{s_2} ds = \int_{\bar{s}_2} ds + \int_{s_{21}} ds$

(C) denkleminde

$$w_1 = \frac{1}{2GA_1}\left(q_1 \oint_{s_1} \frac{ds}{t} - q_2 \oint_{s_{12}} \frac{ds}{t}\right)$$

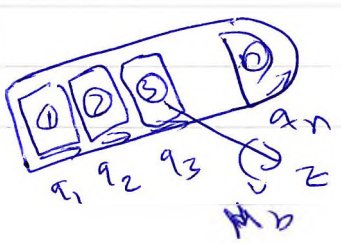
$$w_2 = \frac{1}{2GA_2}\left(q_2 \oint_{s_2} \frac{ds}{t} - q_1 \oint_{s_{21}} \frac{ds}{t}\right)$$

$w_1 = w_2$ olmalı

$$\frac{1}{A_1}\left(q_1 \oint_{s_1} \frac{ds}{t} - q_2 \oint_{s_{12}} \frac{ds}{t}\right) = \frac{1}{A_2}\left(q_2 \oint_{s_2} \frac{ds}{t} - q_1 \oint_{s_{21}} \frac{ds}{t}\right) \qquad (D)$$

(n) tane göz var ise :

$$M_b = 2\sum_{i=1}^{n} q_i A_i \qquad (F)$$



uygunluk şartı :

$w_1 = w_2 = w_3 = \dots = w_n$ olmalı

$$w = \frac{1}{2GA_2}\left[q_2 \oint_{s_2} \frac{ds}{t} - q_1 \oint_{s_{21}} \frac{ds}{t} - q_3 \oint_{s_{23}} \frac{ds}{t}\right] \qquad (G)$$

Herhangi bir göz için:

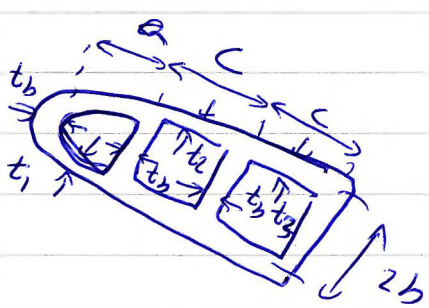
$$w = \frac{1}{2G\cdot A_i}\left[q_i \oint_{s_i} \frac{ds}{t} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \left(q_j \int \frac{ds}{t}\right)\right] \qquad (i=1,\ldots,n) \qquad (H)$$

m tane ara bölme var ise.

(F) ve (H) denklemleriyle (n+1) bilinmeyen bulunur

$w, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$

Örnek: Şekildeki maket kesiti kanadı iki dikdörtgen ve bir yarı eliptik gözden oluşmuştur. Kanada etkiyen burulma momenti $M_b = 9$ KNm ise her bir gözde kayma akısını ve tüp kesitin birim dönme açısını bulunuz.



$a = 100$ mm $2b = 100$ mm

$c = 200$ mm $t_b = 6$ mm $t_1 = 3$ mm

$t_2 = 4$ mm $t_3 = 4$ mm

1. göz: $A_1 = \frac{1}{2}\pi ab = 7854$ mm²

2. göz: $A_2 = \frac{1}{2}\pi ab = 2\times10^4$ mm²

ve yarı elipsin uzunluğu $S_e = \pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = 248.4$ mm

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_b = \sum_{i=1}^{3} 2q_i A_i \Rightarrow 900 = 1.57\,q_1 + 4q_2 + 4q_3$$

uyumluluk denklemi: $w_2 = w_1 = w_2 = w_3$

Herhangi bir i gözünde

$$w_i = \frac{1}{2GA_i}\left[q_i \oint \frac{ds}{t} - \sum_{j=1}^{m} q_j \int_{s_{ij}} \frac{ds}{t_{ij}}\right] \qquad i = 1,\ldots,n$$

ohalde:

$$2GA_1W_z = q_1\left(\frac{sc}{t_1} + \frac{2b}{t_b}\right) - q_2\left(\frac{2b}{t_b}\right)$$

$$2GA_2W_z = q_2\left(\frac{2c}{t_2} + \frac{4b}{t_b}\right) - q_1\left(\frac{2b}{t_b}\right) - q_3\left(\frac{2b}{t_b}\right)$$

$$2GA_3W_z = q_3\left(\frac{2c}{t_3} + \frac{4b}{t_b}\right) - q_2\left(\frac{2b}{t_b}\right)$$

http://makinaegitimi.com